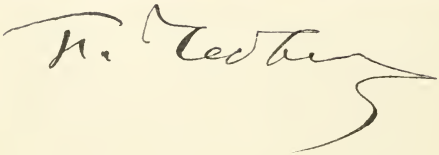
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 00183955 4

QA
29
C5V3

UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY



Vassilev, Alexandre - Vassilev

P. L. TCHÉBYCHEF

ET

SON ŒUVRE SCIENTIFIQUE

PAR

A. VASSILIEF

PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE KASAN

TURIN
CHARLES CLAUSEN
1898

47406
93/2/00

QA
29
C5V3

Extrait du *Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di* Gino Loria (Turin, C. Clausen éditeur) Année 1898

Genova, Tip. R. Istituto Sordo-Muti

A M. CHARLES HERMITE

EN SOUVENIR DE SON AMI P. TCHÉBYCHEF

Hommage très respectueux

de A. VASSILIEF.

I.

Biographie. — Premières recherches (Théorie des nombres).

Pafnutii Lvovitch Tchébychef, fils de parents nobles résidant dans le gouvernement de Kalouga, district de Borovsk, naquit le 14/26 Mai 1821. Comme bien des enfants actifs et intelligents, il éprouvait un grand plaisir à construire des jouets mécaniques, tels que petits moulins etc. Je lui ai entendu raconter que dès ses premières leçons de géométrie il aperçut la liaison étroite existant entre ses jouets favoris et ce nouveau sujet d'études. « Il faut que j'apprenne bien ces choses là » se dit l'enfant, et il se mit à étudier la géométrie avec ardeur. Ainsi se manifestèrent dès l'enfance les penchants et les tendances d'esprit du géomètre qui, pendant toute son existence, rechercha les méthodes mathématiques les plus propres aux applications de la mécanique.

Admirablement préparé dans la demeure paternelle par une éducation qui donna libre carrière au développement de ses penchants naturels, Tchébychef en 1837 devint étudiant de la Faculté Physico-mathématique de Moscou. Cette Université brillait alors d'un vif éclat; l'enseignement mathématique était donné par d'excellents professeurs, entre autres, Zernof et Braschman.

En 1841 Tchébychef quitta l'Université avec le diplôme de candidat, après avoir obtenu une médaille d'or pour un travail intitulé « Sur la résolution numérique des équations algébriques d'ordre supérieur ». Ses études universitaires terminées, c'est en 1843 qu'il débuta comme savant par deux notes publiées dans les premiers journaux mathématiques de l'époque. La première est une « Note sur une classe d'intégrales définies multiples », qui parut dans le Journal de Liouville [1] (*), et attira l'attention de Catalan: la deuxième parut l'année suivante

(*) Ce numéro entre crochets, comme ceux qui suivent, se rapporte à la liste des ouvrages et mémoires de Tchébychef placée à la fin de l'article actuel.

dans le Journal de Crelle [2] et traite de la convergence de la série de Taylor. Ces deux sujets n'eurent depuis qu'un intérêt secondaire pour Tchébychef. C'est vers cette époque que le jeune savant commença à s'occuper de la théorie des probabilités, qu'il devait enrichir plus tard de résultats d'une si haute valeur. Le but de son « Essai d'analyse élémentaire de la théorie des probabilités » (1845) [3] est, comme il le dit dans la préface, de « démontrer, *sans le secours de l'Analyse transcendante*, les théorémes généraux du calcul des probabilités, et d'en déduire de même les principales applications sur lesquelles reposent toutes les connaissances fondées sur les observations et sur les expériences ».

Cet essai valut à Tchébychef le grade de *magister*, et en 1847 il fut invité par l'Université de Saint-Pétersbourg à professer l'Algèbre supérieure et la Théorie des nombres. Quelque temps avant son arrivée à Saint-Pétersbourg, l'Académie Impériale des Sciences avait entrepris la publication d'une édition complète des mémoires d'Euler *(Opera minora collecta)*. L'Académicien Fuss dans son rapport sur ce sujet, daté du 6 Avril 1841, écrivait : « Hoc monumentum, quod etiam ad veram Russiae in litteris gloriam promovendam valebit, est editio completa omnium operum viri illius quem Academia Petropolitana inde a prima origine quinquaginta amplius annos suum fuisse gloriatur ». Le jeune Tchébychef fut appelé à collaborer à cette œuvre grandiose, et dès 1849 Bouniakofsky et lui firent paraître les deux grands volumes qui, sous le titre « Leonhardi Euleri commentationes arithmeticae collectae », contiennent les 99 mémoires d'Euler sur la théorie des nombres. Ces mémoires (parmi lesquels un mémoire étendu, « Tractatus de numerorum doctrina », et quelques autres encore parurent alors pour la première fois) sont disposés dans l'ordre chronologique ; mais un « Index systématique et raisonné » [7] admirablement rédigé, précède cette collection. Si l'idée d'une nouvelle édition d'Euler, émise dans ces dernières années et correspondant à un pressant besoin scientifique, va se réaliser, grâce au concours de toutes les nations civilisées, on n'aura qu'à prendre comme modèle l'excellente édition des œuvres arithmétiques à laquelle collabora Tchébychef.

L'édition des mémoires d'Euler conduisit le jeune mathématicien à étudier la théorie des nombres, et, comme pour essayer ses forces, il attaqua pour commencer le problème le plus ardu de la théorie des nombres, la recherche de la loi de distribution des nombres premiers dans la série des nombres naturels et il consacra à cette question deux mémoires rémarquables.

Dans le premier de ces mémoires [5] il démontre par une analyse extrémement élégante que la fonction $\varphi(x)$, qui détermine le nombre

des nombres premiers inférieurs à une limite donnée, vérifie une infinité de fois, entre les limites $x = 2$ et $x = \infty$, les deux inégalités

$$\varphi(x) > \int_2^x \frac{dx}{\log x} - \frac{\alpha x}{\log^n x}$$

et

$$\varphi(x) < \int_2^x \frac{dx}{\log x} + \frac{\alpha x}{\log^n x},$$

quelque petite que soit la valeur de α, supposée positive, et quelque grand que soit en même temps le nombre n. Il s'ensuit que l'expression

$$\frac{x}{\varphi(x)} - \log x,$$

pour $x = \infty$, ne peut avoir une limite différente de 1, ce qui ne s'accorde pas avec la formule approximative pour la fonction $\varphi(x)$, donnée par Legendre $\left(\varphi(x) = \frac{x}{\log x - 1,08366}\right)$.

De même il s'ensuit que l'on peut adopter comme valeur approchée de la fonction $\varphi(x)$ l'intégrale $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$ (*).

Dans le second mémoire [8], Tchébychef donne une équation fonctionnelle, vérifiée par $\theta(z)$, la fonction qui désigne la somme des logarithmes néperiens de tous les nombres premiers qui ne surpassent pas z. Cette équation (**), trouvée en même temps par le Prince A. de Polignac et plus tard généralisée par Tchébychef [54], donne deux limites pour la fonction $\theta(z)$, ce qui permit à Tchébychef de démontrer rigoureusement le célèbre postulatum de M. Bertrand: « Entre le nombre N et le nombre 2 N — 2 il y a toujours un nombre premier ».

Pendant l'époque comprise entre les publications de ces deux mémoires, Tchébychef fit paraître son ouvrage classique sur la théorie des congruences qui lui tint lieu de thèse de doctorat. Cinquante années se sont écoulées depuis la publication de cet ouvrage, mais il n'a rien perdu de sa haute valeur scientifique et pédagogique; les deux traductions (en allemand et en italien) qui ont paru dans ces dernières années [6] nous le prouvent et nous dispensent aussi de l'analyse détaillée de l'ouvrage. Disons seulement que ce livre est aussi remar-

---

(*) GAUSS en 1792 trouve empiriquement cette même valeur approchée de $\varphi(x)$.

(**) Voir SERRET. *Cours d'Algebre superieure* 3.ième édit., tome II, p. 204.

quable par son style élegant et précis que par l'originalité de l'exposition qui se manifeste spécialement dans les derniers chapitres, traitant de la résolution des congruences du second degré à deux inconnues et de l'application de la théorie des congruences à la décomposition des nombres en leurs facteurs premiers.

On peut considérer comme un complément de ces recherches le mémoire sur les formes quadratiques [9], où l'auteur montre que pour décider si un nombre donné N est premier ou composé, on peut se servir non seulement des formes quadratiques à déterminants négatifs, comme le fait Euler dans ses recherches, mais aussi des formes $\pm(x^2 - Dy^2)$, dont les diviseurs quadratiques ne sont que de la forme $\lambda x^2 - \mu y^2$. Les théorèmes trouvés par Tchébychef sont appliqués au nombre 8520191, dont la nature présente un intérêt particulier pour la théorie des nombres (*). Tchébychef prouve que ce nombre est premièr.

C'est ici la place de citer quelques autres beaux résultats obtenus par Tchébychef dans le domaine de la théorie des nombres.

Le résultat de la recherche de la valeur de $f(1)$, $f(x)$ étant liée à une autre $F(x)$ par une équation de la forme

$$F(x) = f(x) + f(2x) + f(3x) + f(4x) + \cdots,$$

montre que

$$f(1) = A_1 F(1) + A_2 F(2) + A_3 F(3) + A_4 F(4) + \cdots\cdots$$

Si n est premier, on a $A_n = 1$; si n est le produit de plusieurs facteurs premiers différents au nombre de k, on a $A_n = (-1)^k$; enfin si n contient deux fois le même facteur premier, A_n est nul. Un beau développement de e^{-a} en produit d'une infinité de facteurs est un des résultats du théorème cité (Voir [10] et aussi Bertrand. *Calcul différentiel* p. 334). Cette recherche de Tchébychef est intimément liée à l'équation vérifiée par la somme des logarithmes des nombres premiers. Une équation plus générale conduisit Tchébychef à ce résultat remarquable qu'il y a une différence dans la répartition des nombres premiers de la forme $4n+1$ et ceux de la forme $4n+3$ dans la série des nombre naturels, qui se manifeste, par exemple, par ce fait que la valeur de la série (ou $\lambda = \pm 1$ suivent que $c = 4n \mp 1$)

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \lambda e^{-(2n+1)c}$$

tend vers l'infini, lorsque c tend vers zéro.

(*) LEGENDRE (*Théorie des nombres*, tome II, 3e édit., 1830, p. 152) trouva que les deux nombres $A = 2^8 \times 8520191$ et $B = 2^4 \times 257 \times 33023$ sont des nombres amiables, si le nombre 8520191 est un nombre premièr.

Notons enfin le résultat mentionné par M. Hermite dans son cours [79] rélativement à la valeur du rapport $\frac{P_n}{n}$, quand P_n est le plus grand nombre premier contenu dans le nombre $1 + 4n^2$. La démonstration rigoureuse de la propriété qu'a ce rapport de tendre vers l'infini avec n a été donnée récemment par M. Markof d'après un fragment trouvé dans les manuscrits de Tchébychef après sa mort (*).

Ses brillants mémoires sur la théorie des nombres placèrent Tchébychef au premier rang parmi les mathématiciens russes et le designèrent comme professeur au choix de l'Académie des sciences de S. Pétersbourg. Les chaires des mathématiques pures y étaient occupées par Fuss, Ostrogradsky et Bouniakofsky; aussi l'Académie, n'ayant pas de chaire de mathématiques pures disponible, s'empressa de l'appeler en 1853 à la chaire des mathématiques appliquées. Nommé en 1859 académicien ordinaire, et bientôt après professeur ordinaire à l'Université de Saint-Pétersbourg, Tchébychef, grâce au célibat exempt des soins de famille, consacra sa vie exclusivement à la recherche et à l'enseignement. Son enseignement ne fut pas moins remarquable que ses découvertes; son esprit toujours clair et vif s'y réflètait; on ne pouvait écouter ses leçons sans être absorbé par leur intérêt, sans être entrainé par leur enthousiasme (**). Ce fut grâce à son talent de maître que Tchébychef eut des disciples nombreux qui travaillèrent avez zèle au développement de ses idées. Aussi Tchébychef était il entouré dans l'Université de Saint-Pétersbourg d'une auréole de gloire, et ce fut un grand coup pour l'Université quand, nonobstant les priéres réitérées du Conseil Académique de l Université, il résolut en 1882 de quitter sa chaire pour se consacrer exclusivement à l'Académie. Presque tous les ans il allait passer l'été à l'étranger, et l'Association française pour l'avancement des sciences l'a vu souvent assister aux séances de ses Congrés. Ses voyages à l'étranger lui valurent beaucoup d'amitiés scientifiques qu'il aimait à rappeler, même au milieu d'une leçon. Une amitié particuliére le liait à MM. Hermite, Bertrand, Catalan, plus tard à MM. Ed. Lucas et Laisant. Il aimait Paris et on l'y voyait toujours plein d'entrain et d'amabilité. Mais à St. Pétersbourg il menait une vie très retirée qu'il consacra aux mathématiques jusqu'à la fin de sa vie. La veille même de sa mort subite, qui survint le 26 Nov. (8 Décembre) 1894, il s'entretint encore

---

(*) Comptes rendus, T. CXX, 1895, p. 1032-1034.

(**) De 1860 jusqu'à 1875 il donna des leçons sur la théorie des intégrales definies et sur l'intégration des équations différentielles, sur la théorie des nombres et sur celle des probabilités. En 1875 il transmit à un autre professeur le cours sur les équations différentielles.

de mathématiques au sujet d'une simple règle qu'il avait découverte pour la rectification très exacte d'une courbe [83].

Les mérites de Tchébychef furent hautement appréciés par le monde scientifique. En 1860 il fut élu membre correspondant de l'Académie de Paris, et en 1874 son associé étranger. C'est le premier russe qui ait eu cet honneur depuis Pierre-le-Grand. Aucun savant russe n'a de son vivant joui d'une telle gloire, qui ne pourra que devenir plus grande quand le monde scientifique connaîtra tout l'ensemble des recherches et des idées ingénieuses de Tchébychef. Aussi doit on se réjouir extrêmement de l'excellente idée qu'a eue l'Académie de St. Pétersbourg de publier deux éditions complètes des Œuvres de notre illustre géomètre (en russe et en français). Le premier volume de cette édition est déjà en voie de préparation.

II.

Valeurs approchées d'une fonction. Questions de minima d'un genre particulier. Fonctions qui s'écartent le moins possible de zéro. Construction des cartes géographiques.

Avant la nomination de Tchébychef à la chaire académique de mathématiques appliquées, deux problèmes de cette science — un problème de la théorie des mécanismes et un problème de balistique — lui avaient ouvert un champ de recherches tout-à-fait nouveau et très fécond, où il est parvenu à créer une nouvelle branche des mathématiques, ayant pour but de donner des méthodes d'approximation qui fournissent le maximum d'exactitude pour toutes les valeurs de la variable entre deux limites données. Pour fixer les idées du lecteur, j'abandonnerai maintenant l'ordre strictement chronologique afin de pouvoir grouper ensemble les travaux analogues, et je commencerai par faire connaître une série de recherches qui eut pour point de départ un problème de la théorie des mécanismes, où il s'agit d'assurer la direction rectiligne du mouvement d'une pièce soumise à un effort oblique.

Donner la théorie du célèbre parallélogramme de Watt et de ses autres modifications, ainsi qu'une méthode pour déterminer les éléments le plus convenables pour la précision du jeu du parallélogramme — tel fut le but de son mémoire de 1853: « Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes » [11]. Pour résoudre ce problème, il faut trouver des formules approximatives d'un caractère tout-à-fait distinct de celui des formules qui sont données par l'analyse ordinaire. La somme des n premiers termes de la formule de Taylor nous donne pour la fonction $f(x)$ un polynôme qui, parmi tous les

autres de même degré, s'approche le plus près de la fonction $f(x)$ pour $x = a$, et c'est ce polynôme que l'on prend pour valeur approchée de la fonction $f(x)$. Mais dans ce problème de la théorie des mécanismes, il s'agit de trouver le polynôme qui s'approche le plus d'une fonction donnée, non pour une valeur particulière de $x = a$, mais pour un intervalle donné de x, entre $x = a - h$ et $x = a + h$. Ce polynôme P est déterminé par la condition que la plus grande valeur que prend la différence $f(x) - \mathrm{P}$ entre des limites données s'écarte le moins possible de zéro, c'est-à-dire soit moindre que cette différence pour tous les autres polynômes de même degré. A mesure que l'intervalle considéré décroit, la seconde valeur approchée de $f(x)$ se rapproche de celle qu'on trouve au moyen du développement de $f(x)$ suivant les puissances de $x - a$. Mais tant que cet intervalle reste fini, les coefficients de ces deux valeurs diffèrent entre eux, et ces différences, même dans le cas où elles sont petites, ne peuvent être négligées dans la théorie des mécanismes.

Une analyse ingénieuse reduit la question posée à l'intégration d'une équation différentielle de la forme:

$$\frac{\mathrm{Q}\,dz}{\sqrt{(z^2 - 1)\,\mathrm{P}}} = \frac{dy}{\sqrt{y^2 - \mathrm{L}^2}},$$

où P et Q sont des polynômes de degrés $2m$ et m, et L une constante.

Pour le cas ordinaire et qui se présente dans la théorie des parallélogrammes ($m = o$), l'intégration s'effectue immédiatement, et fournit la forme générale du polynôme qui détermine les différences entre les coefficients de la valeur approchée de $f(x)$, trouvée au moyen de son développement suivant les puissances de $x - a$, et ceux pour lesquels la limite des erreurs dans l'intervalle $x = a - h$, $a + h$ est un *minimum*. On obtient ainsi, sous forme d'un polynôme, la valeur approximative de la fonction dans un intervalle donné. Dans le mémoire [20] qui parut en 1857 Tchébychef résout des questions d'un ordre plus général, notamment: « étant donnée une fonction quelconque $\mathrm{F}(x)$ possédant n paramètres arbitraires $p_1, p_2, \ldots, p_n$, il s'agit par un choix convenable des valeurs $p_1, p_2, \ldots, p_n$, de rendre minimum, la limite des écarts de zéro de la fonction $\mathrm{F}(x)$, entre $x = -h$ et $x = +h$ ».

Tchébychef considère en particulier les trois cas suivants:

$$\mathrm{F}(x) = p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \cdots\cdots + p_{n-1} x + p_n - y$$

$$\mathrm{F}(x) = \frac{p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \cdots\cdots + p_{n-1} x + p_n}{\mathrm{A}_0 x^m + \mathrm{A}_1 x^{m-1} + \cdots\cdots + \mathrm{A}_{m-1} x + \mathrm{A}_m} - y$$

$$\mathrm{F}(x) = \frac{p_1 x^{n-l-1} + p_2 x^{n-l-2} + \cdots\cdots + p_{n-l-1} x + p_{n-l}}{p_{n-l+1} x^l + \cdots\cdots + p_n x + l} - y$$

Les fonctions déterminées d'après les conditions posées donneront ainsi des valeurs approchées de y sous forme d'un polynôme ou d'une fonction rationnelle ayant un dénominateur donné ou arbitraire.

Après avoir donné les théorèmes généraux pour la résolution des questions posées, Tchébychef s'arrête plus spécialement sur le cas $y = o$ c'est-à-dire sur la recherche des polynômes et des fractions rationnelles qui s'écartent le moins possible de zéro entre les limites $x = -h$ et $x = +h$. Nous ne nous arrêterons un instant que sur la première question, celle de la recherche du polynôme $F(x)$ de la forme

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \cdots\cdots + p_{n-1} x + p_n.$$

Des considérations à la fois simples et ingénieuses ramènent cette question à un problème d'analyse indéterminée, c'est-à-dire à la recherche de deux polynômes $F(x)$ et $\Phi(x)$ satisfaisant à l'équation $F(x)^2 - L^2 = (x^2 - h^2)\Phi^2(x)$, L désignant la plus grande valeur absolue du polynôme $F(x)$, lorsque x varie de $-h$ à $+h$.

Cette équation, que l'on ramène aisément à la forme:

$$\frac{F(x)}{\Phi(x)} - \sqrt{x^2 - h^2} = \frac{L^2}{\Phi(x)\left[F(x) + \Phi(x)\sqrt{x^2 - h^2}\right]},$$

montre que $\frac{F(x)}{\Phi(x)}$ doit être une des réduites du développement en fraction continue convergente de $\sqrt{x^2 - h^2}$; on en déduit pour le polynôme $F(x)$ la forme définitive suivante:

$$F(x) = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 - h^2}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2 - h^2}\right)^n}{2^n} \qquad (*)$$

Des conséquences importantes peuvent être tirées de cette valeur de la fonction qui, entre $x = -h$ et $x = +h$, s'écarte le moins possible de zéro. Telle est l'application à l'interpolation. Tchébychef montre que, sous le rapport de la précision des résultats d'interpolation, le système de valeurs de $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$ le plus avantageux est celui où la fonction $(x - x_1)(x - x_2) \ldots\ldots (x - x_n)$ s'écarte, entre les limites d'interpolation, le moins de zéro, et que, par conséquent, on doit prendre

$$(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 - h^2}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2 - h^2}\right)^n}{2^n},$$

lorsqu'il s'agit d'interpoler entre les limites $x = -h$, $x = +h$.

On peut de là déduire d'importantes conséquences pour l'Algèbre

(*) BERTRAND. *Calcul différentiel*, p. 488.

supérieure, sous forme de théorèmes relatifs aux limites des racines; nous donnerons comme exemple le suivant : « Si l'équation

$$x^{2l+1} + A x^{2l-1} + \cdots + S x + K = 0$$

ne contient que des puissances impaires de x, une au moins des racines est comprise entre

$$-2\sqrt[2l+1]{\frac{K}{2}} \quad \text{et} \quad 2\sqrt[2l+1]{\frac{K}{2}} \text{ ».}$$

Les fonctions qui s'écartent le moins possible de zéro, étudiées dans le mémoire fondamental qui nous occupe, peuvent croître et decroître entre les limites données. Plus tard Tchébychef se proposa la question de déterminer les polynômes qui s'écartent le moins possible de zéro et sont de plus assujetis à la condition de croître continuellement ou bien de décroître continuellement entre les limites données. Tel est le sujet d'un mémoire de 1873 [45]. Les polynômes qu'on trouve alors sont des polynômes que Tchébychef a nommé « polynômes analogues aux fonctions de Legendre » (dans le cas ou le polynôme est de degré impair et est une fonction toujours croissante, ce polynôme coincide avec la fonction X_n de Legendre); il déduit encore de la forme de ces polynômes des résultats importants pour la théorie des limites des racines.

Enfin, plus tard, Tchébychef appliqua les formules générales du mémoire « Sur les questions de minima » [20], à la recherche des expressions approchées d'une racine carrée au moyen de fractions irréductibles et à la détermination de polynômes qui, entre les limites données, représentent le mieux ces fractions [66, 73, 76]. Les deux résultats qu'il trouve dans ces mémoires, c'est-à-dire la meilleure représentation de $\sqrt{\frac{1}{x}}$ par la fonction

$$A + \frac{B_1}{C_1 + x} + \frac{B_2}{C_2 + x} + \cdots + \frac{B_n}{C_n + x},$$

où les coefficients A, B_i, C_i s'expriment par des fonctions elliptiques, et la représentation de la fraction $\frac{1}{H - x}$ par un polynôme, peuvent être appliqués à la recherche des valeurs approchées des intégrales

$$\int \frac{U du}{\sqrt{V}} \quad \text{et} \quad \int_{-h}^{+h} \frac{f(x)\, dx}{H - x}.$$

Tchébychef a consacré de plus un mémoire spécial [43] à la question

des quadratures, où il considère l'intégrale $\int_{-1}^{+1} F(x)\,\varphi(x)\,dx$, et généralise les beaux résultats de M. Hermite relatifs à l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Tchébychef avait étudié a fond Euler et avait reconnu que celui-ci l'avait precédé dans la considération des fonctions qui s'écartent le moins possible de zéro; il en donna une belle application dans l'étude des projections géographiques. Dans ses recherches sur la projection conique, Euler détermine les coefficients de la projection d'après la condition qu'une ellipse, dite « ellipse d'altération », diffère le moins possible d'une circonference (*). C'est probablement cette remarque d'Euler, conforme aux pensées qui occupaient Tchébychef depuis 1853, qui l'a porté à s'occuper de la construction des cartes géographiques, et à se proposer le problème de trouver parmi toutes les projections qui conservent la similitude dans les parties infinitésimales celle pour laquelle l'altération du rapport d'agrandissement dans toute la carte se reduit à un *minimum*. Tchébychef repond à cette question par le théorème suivant: « Parmi toutes les projections qui conservent la similitude des éléments infiniment petits, la projection pour laquelle le rapport d'agrandissement est constant le long du contour de la région représentée est celle qui donne les plus petites altérations de ce rapport à l'intérieur du contour ». Comme Lagrange avait donné pour le logarithme du rapport d'agrandissement la formule

$$log\ m = U - log\ \frac{2}{e^u + e^{-u}},$$

où U est l'intégrale de l'équation $\frac{d^2 U}{du^2} + \frac{d^2 U}{dt^2} = 0$, le théorème, donné par Tchébychef en 1856 sans démonstration [17], constitue une application de sa théorie de fonctions qui s'écartent le moins possible de zéro à la théorie des équations aux derivées partielles; la demonstration du théorème a été donné par M. Gravé en 1894 (**).

Tchébychef a donné une application de son théorème à la carte géographique de la Russie qui présente, à cause de l'étendue du pays, des difficultés particulières. Tandis que la projection stéréographique donne pour la Russie Européenne des altérations du rapport d'agrandissement qui vont jusqu'à $^1/_{3}$, de la valeur normale de ce rapport, la projection

(*) *De projectione geographica Delisliana in mappa generali Imperii Russici usitata* (Acta Acad. Petrop. pro anno 1777).

(**) Association franç. pour l'avancement des sciences. Congrès de Caen, 1894.

recommandée par Tchébychef diminue cet écart jusqu'à $^1/_{50}$ de cette valeur; c'est le plus haut degré d'exactitude qu'on puisse obtenir si on représente les méridiens et les parallèles par des cercles ou des droites [18].

III.

Intégration des différentielles irrationnelles.

C'est l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2 - L^2}} = \frac{Q\,dz}{\sqrt{(z^2 - 1)\,P}},$$

a laquelle Tchébychef a ramené le problème de la détermination de la valeur approchée d'une fonction dans son mémoire [11], qui a été le point de départ de ses recherches sur l'intégration des différentielles irrationnelles: cette équation montre en effet que $\int \frac{Q\,dz}{\sqrt{(z^2 - 1)\,P}}$, où P et Q sont des polynômes, peut être réduite à un terme logarithmique. Depuis lors, la théorie de l'intégration sous forme finie devint un des sujets d'étude de prédilection de l'illustre géomètre, et là, comme partout ailleurs, il a obtenu des résultats remarquables.

Dans le mémoire [12] Tchébychef donne une méthode pour trouver la partie algébrique dans l'expression de l'intégrale $\int \frac{f(x)\,dx}{F(x)\sqrt[m]{\theta(x)}}$, où $f(x)$, $F(x)$, $\theta(x)$ sont des fonctions entières quelconques et m un nombre entier positif; il y donne également une méthode pour déterminer séparément tous les termes logarithmiques à l'aide des conditions analytiques que ceux-ci doivent vérifier. C'est aussi dans ce mémoire qu'il montre que les méthodes ordinaires de l'intégration des différentielles binômes à exposants rationnels renferment tous les cas où cette intégration est possible au moyen de fonctions algébriques et logarithmiques.

Dans le mémoire [14] Tchébychef fait voir comment on peut trouver, d'après les conditions données dans le mémoire [12], les termes logarithmiques dans le cas le plus simple où la différentielle porte sur la racine carrée d'un polynôme du 3e ou du 4e degré. Il démontre aussi que l'intégration d'une différentielle elliptique, lorsqu'elle peut être effectuée sous forme finie, se réduit en fin de compte à l'évaluation d'intégrales de forme

$$\frac{(x + A)\,dx}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}}.$$

Dans mémoire spécial, consacré à l'intégration de cette différentielle [26], Tchébychef donne, pour le cas où α, β, γ, δ sont rationnels, une méthode qui, au moyen d'opérations algébriques en nombre limité, conduit ou bien à trouver si pour une certaine valeur déterminée de A, l'intégrale ci-dessus peut s'exprimer en termes finis, ou bien à reconnaître si cela n'est possible pour aucune valeur de A. Cette méthode a une grande superiorité sur celle d'Abel, qui conduit à une série d'opérations pouvant se prolonger indéfiniment sans jamais atteindre un résultat décisif (*).

C'est dans ces questions que Tchébychef reconnut l'immense importance pour l'analyse des fractions continues introduites par Abel dans la question de l'intégration sous forme finie. Son attention une fois portée sur ce sujet le conduisit aux plus belles applications de la théorie des fractions continues, et la plus grande partie de ses recherches ultérieures est intimement liée à cet instrument d'analyse que personne depuis Lagrange et Abel n'a manié avec une facilité pareille à celle de l'illustre géomètre russe. Mais avant de passer à ces nouvelles applications, je veux encore mentionner les recherches de Tchébychef relatives à une question plus élevée de la théorie de l'intégration des différentielles irrationnelles, où les fractions continues cessent d'être applicables; c'est celle de l'intégration des différentielles irrationnelles qui renferment une racine cubique [30, 36].

Dans le mémoire [12] Tchébychef a montré que, si l'intégrale $\int \frac{f(x)\,dx}{F(x)\sqrt[m]{R(x)}}$ peut s'exprimer sous forme finie, elle aura la forme

$$Z\sqrt[m]{R^{m-1}} + \Sigma A \log\left[\varphi\left(\sqrt[m]{R}\right)\varphi^{\alpha}\left(\alpha\sqrt[m]{R}\right)\ldots\varphi^{\alpha^{m-1}}\left(\alpha^{m-1}\sqrt[m]{R}\right)\right],$$

où Z et φ sont les fonctions rationnelles et α une racine primitive de l'équation $x^m - 1 = 0$. Pour l'intégrale $\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt[m]{R(x)}}\,dx$, il se présente la question algébrique suivante: trouver les fonctions

$$\varphi\left(\sqrt[m]{R}\right),\ \varphi\left(\alpha\sqrt[m]{R}\right)\ldots,\ \varphi\left(\alpha^{m-1}\sqrt[m]{R}\right)$$

qui vérifient l'équation

$$\varphi\left(\sqrt[m]{R}\right).\ \varphi\left(\alpha\sqrt[m]{R}\right)\ldots\ \varphi\left(\alpha^{m-1}\sqrt[m]{R}\right) = C.$$

(*) Le cas plus général de α, β, γ, δ réels quelconques a été consideré par un des disciples de Tchébychef, ZOLOTAREF, et résolu par une méthode ingénieuse à l'aide de la théorie des nombres entiers complexes.

où C est une constante. Pour les intégrales des différentielles portant sur une racine carrée, la question se ramène aisément à celle de trouver les polynomes P et φ satisfaisant à l'équation $P^2 Q^2 R = C$, et peut être résolue au moyen des fractions continues. Pour les intégrales des différentielles portant sur une racine cubique la question se ramène au problème de trouver trois polynomes X, Y, Z tels que le degré de l'expression

$$X + Y \sqrt[3]{R_1 R_2^2} + Z \sqrt[3]{R_1^2 R_2}$$

$(R = R^2_1 R^2_2)$ soi le plus petit possible. Cette recherche exigeait une nouvelle méthode; on est en présence d'un problème des plus difficiles, dont se sont occupés Jacobi et M. Hermite, et qui dans ces dernières années a attiré de nouveau l'attention de géometres éminents. Cette nouvelle méthode a été exposée par Tchébychef dans le mémoire [36], où l'illustre analyste donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale

$$\int \frac{\varphi(x)\, dx}{\sqrt[3]{x^3 + ax + b}}$$

puisse être evaluée sans forme finie.

IV.

Interpolation d'après la méthode des moindres carrés. Développement en séries procédant suivant les dénominateurs des reduites. Valeurs limites des intégrales dans le cas où la fonction intégrée est décomposable en deux facteurs.

Porté vers l'étude des fractions continues par ses recherches sur les questions de minima et sur l'intégration des différentielles irrationnelles, Tchébychef en fit bientôt une brillante application à cette importante question de l'interpolation, question qui, d'après la juste remarque faite par M. Laisant dans son nouveau livre sur la philosophie et l'enseignement des mathématiques, constitue l'un des plus intéressants chapitre de la philosophie naturelle. C'est un problème de balistique, proposé à Tchébychef par le comité scientifique de l'administration supérieure de l'artillerie russe, qui le conduisit à porter son attention sur l'interpolation.

Dans le problème de l'interpolation parabolique, il s'agit de trouver un polynome

$$y = F(x) = a + bx + cx^2 + \cdots + gx^{m-1} + hx^m$$

donnant pour les $n + 1$ valeurs $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la variable les

$n+1$ valeurs correspondantes de la fonction inconnue $f(x)$ avec une erreur aussi petite que possible. Lorsque m est égal à n, le problème est déterminé; lorsque m est plus petit que n, il cesse de l'être: mais il le devient de nouveau, si l'on ajoute la condition que

$$\sum_{i=o}^{i=n} \frac{1}{2} \left(y - f(x_i)\right)^2 \theta^2(x_i)$$

doit être un minimum. Dans ce cas de l'interpolation d'après la méthode des moindres carrés Tchébychef donna pour le polynôme $y = \mathrm{F}(x)$ une formule remarquable dans laquelle entrent les dénominateurs $\psi_m(x)$ des réduites du développement en fraction continue de la somme

$$\sum_{i=o}^{i=n} \frac{\theta^2(x_i)}{x - x_i} = \frac{1}{\alpha_1 x + \beta_1} - \frac{1}{\alpha_2 x + \beta_2} - \frac{1}{\alpha_3 x + \beta_3} \dot{-} \ldots$$

[15, 16]. Cette formule jouit de la propriété importante qu'il n'est pas nécessaire d'en fixer d'avance le nombre des termes et qu'on peut trouver ceux-ci successivement l'un après l'autre, ce qui donne une grande supériorité pratique à la nouvelle méthode. Tous les détails importants pour l'application (les formules recurrentes qui lient les coefficients de la formule, ainsi que les formules pour l'évaluation de l'erreur moyenne quadratique dont la valeur permet de reconnaitre le nombre des termes de la formule qu'il faut prendre pour avoir un degré d'exactitude assigné) furent publiés séparément par Tchébychef dans le mémoire [25].

Cette nouvelle application des fractions continues fournit à Tchébychef l'occasion d'approfondir la théorie de ces fractions et de trouver quelques beaux resultats, par exemple, les propriétés remarquables suivantes des dénominateurs des réduites $\psi_m(x_i)$:

$$\sum_{i=o}^{i=n} \psi_\mu(x_i) \cdot \psi_\nu(x_i)\, \theta^2(x_i) = 0, \ (\mu \gtrless \nu)$$

$$\sum_{i=o}^{i=n} \psi_\mu^2(x_i)\, \theta^2(x_i) = \frac{1}{\alpha_{\mu+1}},$$

où $\alpha_{\mu+1}$ est le coefficient de x dans un des quotients incomplets (*).

La formule générale de l'interpolation d'après la méthode des moindres carrés, donnée par Tchébychef, peut être specialisée, en faisant

(*) Ces formules ont été trouvées aussi par M. Rouché (Journal de l'École Polytecnique, cahier 37).

différentes hypothèses particulières sur le choix de la suite de valeurs $x_0, x_1, \ldots x_n$ ainsi que sur la forme de la fonction arbitraire $\theta^2(x)$.

1.° On peut supposer que les valeurs de l'inconnue forment un continuum linéaire. Alors la somme $\Sigma_i \frac{\theta^2(x_i)}{x - x_i}$ se transforme en une intégrale, le nombre des réduites devient infini, et la formule d'interpolation se transforme en un développement en série infinie.

Pour $\theta^2(x) = dx$, lorsque l'on suppose que $x_0, x_1, \ldots$ forment un continuum linéaire entre -1 et $+1$, l'on a [16] un développement suivant les fonctions de Legendre X_n.

Lorsque $\theta^2(x)$ est proportionel à $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ et que la suite des valeurs $x_0, x_1, \ldots$ forme un continuum entre -1 et $+1$, on a le développement en série de Fourier, procédant suivant les cosinus des multiples de l'argument.

Ces deux cas bien remarquables se présentent aussi [23], lorsque $x_0, x_1, \ldots$ forment un continuum linéaire entre $-\infty$ et $+\infty$ et que la fonction $\theta^2(x)$ est proportionelle à $\sqrt{\frac{k}{\pi}}\, e^{-kx^2}$ où à ke^{-kx}.

Enfin Tchébychef s'est arrêté aussi sur le cas spécial où $\theta^2(x)$ est proportionnel à $\frac{1}{(1+x)^\lambda\,(1-x)^\mu}$ et il a consacré le mémoire [38] à la demonstration de la propriété fondamentale suivante des dénominateurs T_m des réduites correspondantes:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_n\, T_m}{(1+x)^\lambda\,(1-x)^\mu}\, dx = 0 \quad (m \lessgtr n).$$

Ces fonctions T_n, envisagées, pour la première fois par Jacobi (*), ont été nommées par Tchébychef « fonctions analogues aux fonctions de Legendre » (**). Elles ont l'importante propriété suivante: l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \frac{Z^2\, dx}{(1+x)^\lambda\,(1-x)^\mu}$, où Z est un polynôme quelconque de degré n, devient un minimum si l'on prend pour Z la fonction T_n, multipliée

(*) *Werke*, Tome VI, p. 185.

(**) On donne plus généralement ce nom aux dénominateurs des réduites dans le développement d'une intégrale de la forme $\int_a^b \frac{f(z)\, dz}{x - z}$ en fraction continue.

Les propriétés fondamentales de ces fonctions sont exposées dans l'intéressant ouvrage de M. Possé: *Sur quelques applications des fractions continues algébriques*. St. Pétersbourg 1886.

par un facteur constant. C'est sur cette propriété des fonctions T_n que répose l'étude des polynômes qui s'écartent le moins possible de zéro (voir chapitre II), et qui ont des applications importantes dans la recherche des limites des racines et dans la construction du régulateur a force centrifuge [45, 46].

2.° Dans une autre hypothèse importante, quand on suppose equidistantes et ayant des poids égaux les valeurs connues $f(h)$, $f(2h)$, ... $f(nh)$ de la fonction cherchée, la fonction interpolatrice F (x) est développable suivant les dénominateurs de la fraction continue résultant du développement de l'expression $\frac{1}{x-h} + \frac{1}{x-2h} + \cdots \frac{1}{x-nh}$. Ces dénominateurs, en prenant $\Delta x = h$, s'expriment, à un facteur constant près, par la formule:

$$\psi_m(x) = \Delta^m (x-1)(x-2)\cdots(x-m)(m+n-1-x)\cdots(m-x)$$

et correspondent dans le calcul inverse des différences finies, comme on le voit d'après leur expression, aux fonctions de Legendre qui sont, comme l'on sait, égales à un facteur constant près, à $\frac{d^m (x^2-1)^m}{dx^m}$.

La série obtenue dans ce cas pour la fonction interpolatrice au moyen des valeurs équidistantes et de poids égal de la fonction inconnue, ne laisse rien à désirer car tous les termes se calculent aisément au moyen des différences de valeurs données. La démonstration de cette formule, qui fut seule publiée pour la première fois en 1858 [21, 24, 25], n'a été donnée [29] qu'en 1864. Dans un mémoire [48] de 1875 cette démonstration a été completée, et les formules elles-mêmes ont été remplacées par d'autres plus commodes pour les applications. Tchébychef s'est arreté aussi dans ce mémoire sur le cas plus général où les poids des résultats sont inégaux et où ils s'expriment au moyen de la fonction

$$\theta^2(x) = \frac{\Gamma(x+\alpha)\,\Gamma(m-x+\beta)}{\Gamma(x)\cdot\Gamma(m-x)}.$$

On peut aussi dans ce cas parvenir à des formules élegantes. Tchébychef y completa aussi la démonstration de sa formule d'interpolation dans le cas de valeurs équidistantes [29], ainsi que dans le cas général [25], en démontrant que pour chaque terme successif que l'on ajoute dans la formule d'interpolation on diminue successivement l'erreur moyenne quadratique dont l'expression est facile à évaluer. On peut ainsi reconnaitre immédiatement quel est le nombre des termes de la série qu'il faut prendre pour obtenir un degré d'exactitude prescrit.

Avant de quitter les recherches de Tchébychef sur l'interpolation, nous devons encore mentionner le mémoire [29] consacré a la question

de l'interpolation dans le cas d'un grand nombre de données fournies par les observations. Tchébychef fit voir dans ce mémoire que lorsque l'on connait la fonction

$$F(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots\cdots + A_n x^n,$$

pour toutes les valeurs de x comprises entre $-h$ et $+h$, et que l'on considère ces valeurs comme equidistantes et infiniment voisines, on peut déterminer les coefficients $A_1, A_2, \ldots A_n$ par la simple addition et soustraction de valeurs de la fonction $F(x)$. Les expressions qui déterminent les coefficients affectés de facteurs constants ont la forme :

$$s\,A_l = \int_{-h}^{\eta_1} F(x)\,dx - \int_{\eta_1}^{\eta_2} F(x)\,dx + \cdots\cdots + (-1)^{\nu} \int_{\eta_\nu}^{+h} F(x)\,dx.$$

Il s'agit alors de déterminer le facteur s ainsi que les quantités $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_\nu$.

Cette question est résolue par une méthode analogue à celle employée dans le mémoire [20]. Ce sont les dénominateurs des réduites du développement en fraction continue de certaines fonctions qui donnent les équations dont le racines sont :

$$\eta_1, \eta_2, \cdots\cdots \eta_\nu.$$

Par exemple dans un cas particulier où il s'agit de déterminer le dernier cofficient A_n pour n impair, $\eta_1, \eta_2, \cdots\cdots$ sont les racines de l'équation :

$$\frac{\left(x + \sqrt{x^2 - h^2}\right)^{\frac{n+1}{2}} + \left(x - \sqrt{x^2 - h^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}}{2} = 0.$$

De ces résultats on peut tirer une méthode d'interpolation en observant que si l'on a les valeurs en nombre fini $F(x_1), F(x_2), \ldots\ldots F(x_n)$ de la fonction $F(x)$ et qu'à leur aide on évalue les expression approchées des intégrales

$$\int_{-h}^{\eta_1} F(x)\,dx, \int_{\eta_1}^{\eta_2} F(x)\,dx, \cdots\cdots$$

et par conséquent de A_i, on aura pour la fonction $F(x)$ une formule approchée, qui sera en même temps une formule d'interpolation (*). Remarquons que Tchébychef a appliqué la méthode d'interpolation dont nous venons d'exposer l'idée à la détermination de l'orbite d'une planète, mais, malheureusement, nous n'avons sur ce sujet qu'une très courte indication [89].

Revenons à la formule générale trouvée par Tchébychef pour l'interpolation d'après la méthode des moindres carrés; elle conduit à des inégalités remarquables relatives aux intégrales définies et qui ont été l'objet de nombreuses et intéressantes recherches.

Si l'on suppose que les valeurs x_0, x_1, x_2 ..... forment un continuum linéaire entre a et b et si $\theta^2(x)$ désigne une fonction réelle quelconque, continue ou discontinue, la formule générale de Tchébychef donne pour une fonction $F(x)$ dont on connait les valeurs comprises entre $x = a$ et $x = b$, un développement en série, procédant suivant les denominateurs $\psi_n(x)$ des réduites successives de la fraction continue provenant du développement de l'integrale

$$\int_a^b \frac{\theta^2(z)\,dz}{x - z}.$$

En décomposant au moyen de cette formule nouvelle deux fonctions quelconques u et v de x et en intégrant le produit $uv\theta^2(x)\,dx$ entre les limites a et b, on trouve pour l'integrale

$$\int_a^b uv\,\theta^2(x)\,dx$$

une série remarquable qui donne la valeur de cette intégrale au moyen d'intégrales de la forme

$$\int_a^b u\,\psi_n(x)\,\theta^2(x)\,dx, \quad \int_a^b v\,\psi_n(x)\,\theta^2(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_a^b \psi_n^2(x)\,\theta^2(x)\,dx.$$

Lorsque l'on arrête le développement à un terme quelconque, on doit y ajouter un terme complementaire dont l'expression à été donnée

(*) Dans une mémoire récemment publié (*Sur les valeurs limites des intégrales en leur rapport avec l'interpolation*. Mem. de l'Acad. de St. Pétersbourg, Série VIII, Tome VI), M. Markof généralise la méthode de Tchébychef au cas où la fonction interpolatrice a la forme

$$A_0\,\psi_0(x) + A_1\,\psi_1(x) + A_2\,\psi_2(x) + \ldots,$$

par exemple $A_0 + A_1 \sin x + A_2 \cos x + A_3 \sin 2x + \ldots$

par Tchébychef dans le mémoire [65]. Ce terme complementaire jouit des propriétés suivantes: 1.° sa valeur numérique ne peut surpasser le produit KAB, où K est une quantité essentiellement positive, A et B désignent les plus grandes valeurs numériques absolues des dérivées $\frac{d^n u}{dx^n}$, $\frac{d^n v}{dx^n}$ pour les valeurs de x comprises entre a et b. 2.° Lorsque les dérivées $\frac{d^n u}{dx^n}$, $\frac{d^n v}{dx^n}$ ne changent pas de signe entre a et b, le terme complementaire a donc le même signe que le produit $\frac{d^n u}{dx^n} \cdot \frac{d^n v}{dx^n}$ (*).

Lorsque l'on arrête la série de Tchébychef au premier terme on a:

$$\int_a^b u\, v\, \theta^2(x) = \frac{\int_a^b u\, \theta^2(x)\, dx . \int_a^b v\, \theta^2(x)\, dx}{\int_a^b \theta^2(x)\, dx} + R_1,$$

où R_1 a le même signe que le produit $\frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{dx}$, lorsque ces dernières dérivées ne changent pas de signe entre les limites d'intégration. De là résulte immédiatement le théorème suivant dû à Tchébychef: « Lorsque les fonction u et v sont simultanément croissantes ou simultanément décroissantes entre les limites 0 et 1 de la variable on a:

$$\int_0^1 u\, v\, dx > \int_0^1 u dx . \int_0^1 v\, dx;$$

dans le cas contraire on a:

$$\int_0^1 u\, v\, dx < \int_0^1 u dx . \int_0^1 v\, dx. \text{ »}$$ (**).

(*) Les formules de Tchébychef ont été l'objet de mémoires de M. M. ANDREIEF, IMSCHENETZKY, KORKINE, POSSÉ et SONINE. Nous renvoyons pour les travaux russes à nos rapports publiés dans le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.* Vol. XV, 1883 (p. 222) et vol. XIX, 1887 (p. 222). Dans un mémoire récemment publié: *Sur quelques inégalités relatives aux intégrales définies* (Mém. de l'Acad. de St. Pétersb., Série VIII, Vol. VI, M. SONINE publie des recherches étendues sur le calcul approché des intégrales définies, contenant une démonstrations nouvelle et une généralisation des formules de Tchébychef.

(**) Ce théorème a été publié pour la première fois en 1883 par M. HERMITE dans son *Cours de Faculté des Sciences de Paris* (2.e édition, p. 48) avec une démonstration de M. PICARD. Voir aussi KORKINE, *Sur un théorème de M. Tchébycheff* (Comptes Rendus, T. XCVI).

V.

Nouveau genre de problème du calcul des variations. Développement en séries procédant suivant les fonctions R_n. *Minima successifs de l'expression* $x - ay - b$.

Les travaux relatifs à l'interpolation parabolique d'après la méthode des moindres carrés conduisirent Tchébychef à plusieurs autres études et notamment à celle d'un nouveau calcul analogue à celui des variations.

La question de la détermination d'un polynôme Y sous la condition que la somme $\sum_i \frac{1}{2}\left(Y - f(x_i)\right)^2 \theta^2(x_i)$ soit un minimum peut être considérée comme un cas particulier de la question plus générale où il s'agit de déterminer un polynome Y tel que la somme $\sum_{i=1}^{i=n} F(x_i, Y_i', Y_i'', \ldots)$ soit un minimum, $Y', Y'', \ldots$ désignant les dérivées du polynôme Y et $Y_i, Y_i', Y_i'', \ldots$ les valeurs de ce polynome et de ses dérivées pour $x = x_i$. Un résultat remarquable rattache étroitement ce problème au calcul des variations. Si nous désignons pour abréger les dérivées

$$\frac{d\,F(x, Y, Y', Y'', \ldots)}{d\,Y}, \quad \frac{d\,F(x, Y, Y', Y'', \ldots)}{d\,Y'}, \quad \frac{d\,F(x, Y, Y', Y'', \ldots)}{d\,Y''} \text{ etc.}$$

respectivement par M, N, P, ... et le produit $(x - x_1)(x - x_2)\ldots$ $\ldots(x - x_n)$ par $\varphi(x)$, l'expression

$$M\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \frac{d \cdot N\,\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{d\,x} + \frac{d^2 \cdot P\,\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{d\,x^2} \ldots\ldots\ldots$$

doit être égale à une fonction entière de x, aux termes près de l'ordre $\frac{1}{x^{m}}$.

Du problème correspondant au maximum et au minimum absolus Tchébychef passe au problème correspondant au maximum et minimum relatifs. Il l'envisage sous la forme la plus générale où il s'agit de rendre maximum ou minimum la somme

$$\Sigma\, \Phi_0(x, Y, Y', Y'', \ldots),$$

étendue aux valeurs $a_1, a_2, \ldots$ de la variable x, les coefficients du polynome Y étant soumis aux conditions

$$\Sigma\Phi_1(x, Y, Y', Y'', \ldots) = \alpha_1, \quad \Sigma\Phi_2(x, Y, Y', Y'', \ldots) = \beta_1, \ldots;$$

les sommes ci dessus sont supposées étendues: la première aux valeurs x: b_1, b_2, ..., la seconde aux valeurs de x: c_1, c_2, ... etc. Dans le cas le plus général, le groupe de valeurs b_1, b_2, ... est distinct du groupe c_1, c_2, ... et distinct de même du groupe a_1, a_2, ...

Dans un cas spécial où Y n'entre dans les fonctions Φ_0, Φ_1, Φ_2, ... qu'au second degré et où les dérivées Y′, Y″, ... n'y entrent qu'au premier degré, avec des coefficients ne dépendant que de x, la question se ramène à la détermination du polynôme Y du degré $m - 1$, tel que l'expression

$$u\,\mathrm{Y} - v,$$

où u et v sont deux fonctions de x, se réduit à une fonction entière Z de x aux termes près de l'ordre $\frac{1}{x^m}$. Cette question de trouver des polynômes Y et Z tels que l'expression

$$u\,\mathrm{Y} - \mathrm{Z}$$

diffère le moins possible d'une fonction quelconque v est résolue dans les mémoires [31, 32]. Soit

$$q_0 + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \cdots$$

la fraction continue qui provient du développement de la fonction u et soient $\frac{\mathrm{P}_1}{\mathrm{Q}_1}$, $\frac{\mathrm{P}_2}{\mathrm{Q}_2}$, $\frac{\mathrm{P}_3}{\mathrm{Q}_3}$, ... les réduites de cette fraction continue. Si l'on désigne par E la partie entière d'une fonction, les polynômes Y et Z, tels que l'expression u Y — Z diffère le moins possible de la fonction v, seront donnés par les séries suivantes:

$$\mathrm{Y} = (Eq_1\,\mathrm{Q}_1\,v - q_1\,E\,\mathrm{Q}_1\,v)\,\mathrm{Q}_1 - (Eq_2\,\mathrm{Q}_2\,v - q_2\,E\,\mathrm{Q}_2\,v)\,\mathrm{Q}_2 + \cdots\cdots$$

$$\mathrm{Z} = -Ev + (Eq_1\,\mathrm{Q}_1\,v - q_1\,E\,\mathrm{Q}_1\,v)\,\mathrm{P}_1 - (Eq_2\,\mathrm{Q}_2\,v - q_2\,E\,\mathrm{Q}_2\,v)\,\mathrm{P}_2 + \cdots$$

Ces séries fournissent pour Y et Z des valeurs entières dont le degré est d'autant plus elevé que l'on prend un plus grand nombre de termes; ces valeurs de Y et de Z d'ailleurs sont celles qui rendent la différence u Y — Z aussi proche de v que cela peut se faire au moyen des fonctions entières de mêmes degrés que Y et Z, et même au moyen des fonctions de degrés plus élévés, mais inférieurs aux degrés des fonctions que l'on obtient en prenant dans les expressions de Y et de Z un terme de plus. Les valeurs de Y et de Z ainsi obtenues résultent d'un développement rémarquable trouvé par Tchébychef pour toute fonction v en une série procédant suivant les puissances descendantes

entières de x. Une pareille fonction peut être toujours développée suivant les valeurs des fonctions

$$R_1 = u\,Q_1 - P_1,\ R_2 = u\,Q_2 - P_2,\ \ldots\ R_n = u\,Q_n - P_n,$$

et le développement a la forme suivante:

$$v = Ev + (Eq_1 Q_1 v - q_1 E Q_1 v) R_1 + (Eq_2 Q_2 v - q_2 E Q_2 v) R_2 + \cdots\cdots$$

Dans le cas habituel où le quotients incomplets $q_1, q_2, \ldots\ldots$ sont tous du premier dégré le développement prend la forme:

$$v = Ev + A_1 L_1 R_1 - A_2 L_2 R_2 + A_3 L_3 R_3 - \cdots\cdots$$

L_n désignant le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement de $Q_n v$ suivant les puissances descendantes de x. Pour $v = \frac{1}{x-y}$ on a immédiatement

$$L_n = Q_n(y),$$

d'où

$$\frac{1}{x-y} = A_1 Q_1(y).\, R_1(x) - A_2 Q_2(y) R_2(x) + A_3 Q_3(y) R_3(x) - \cdots\cdots$$

Cette formule remarquable, donnée dans le mémoire [31], est la généralisation de la série connue de Heine (*):

$$\frac{1}{x-y} = \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1)\, P_n(y)\, Q_n(x),$$

où P_n et Q_n sont des fonctions sphériques de I et de II espèce. L'analyse employée dans le mémoire [32] est d'une simplicité remarquable; elle repose sur le calcul des parties entières des fonctions, et, quoique parfaitement indépendante de suppositions relatives à la convergence, elle est absolument rigoureuse.

Observons que la solution de la question de trouver les polynômes Y et Z qui font tendre la différence $u\,Y - Z$ autant que possible vers v a été completée plus tard par Tchébychef dans le mémoire [51].

Une question tout-à-fait analogue peut être posée pour les nombres. On sait que lorsqu'il s'agit de détermines deux nombres entiers x et y tels que la différence $x - ay$, a désignant un nombre incommensurable,

---

(*) *Handbuch der Kugelfunctionem*, 1861, p. 39. Cette série a été donnée pour la première fois dans le mémoire *Theorie der Anziehung eines Ellipsoids* (Crelle's Journ. Bd. 42, 1851). Voir la généralisation remarquable de cette série par Pochhammer dans son mémoire *Ueber die Entwickelung von Functionen nach den Integralen einer Klasse von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung* (Crelle's Journ. Bd. 74).

tende indéfiniment vers zéro, les nombres x et y sont déterminés par le développement de a en fraction continue. Mais la question de trouver deux nombres x et y tels que la différence $x - ay$ s'approche indéfiniment de b a été posée et résolue par Tchébychef le premier, dans le beau mémoire [33]. Une analyse ingénieuse et profonde conduit au théorème suivant: « a désignant un nombre incommensurable quelconque, il existe une infinité de systèmes de nombres entiers x et y tels que la fonction linéaire

$$x - ay - b,$$

b désignant une constante quelconque, devienne plus petite en valeur absolue que $\frac{1}{2y}$. ». L'expression $m - na$, où m et n sont des nombres entiers, peut donc représenter un nombre réel quelconque avec une approximation aussi grande que l'on veut. La belle et importante application de cette proposition faite par M. Hermite [80] à la théorie des fonctions est aujourd'hui classique.

C'est dans le mémoire [35] que Tchébychef a exposé son nouveau calcul des maxima et minima, qui se distingue du calcul des variations en ce sens que la forme de la fonction Y, tout-à-fait indéterminée dans le calcul ordinaire, est supposée donnée dans ces problèmes d'un nouveau genre. Après avoir exposé les principes généraux de la solution de ces problèmes, il applique ces principes au problème de l'interpolation d'après la méthode des moindres carrés. Dans le cas du minimum absolu il trouve facilement la formule générale de l'interpolation dont nous avons parlé au chapitre précédant; mais il envisage aussi un cas particulier où un des coefficients du polynôme Y doit avoir une valeur assignée, ce qui lui fournit l'occasion d'appliquer ses formules ayant trait aux maxima et minima relatifs. Il donna plus tard une autre application de ces formules dans le memoire [63], où il envisage le rapport de deux intégrales prises pour les mêmes valeurs de la variable. La question ici posée se ramène à la suivante: « Parmi tous les polynomes Z de degré donné et vérifiant l'equation

$$\int_{-1}^{+1} Z^2\, \theta\,(x)\, dx = 1$$

trouver le polynome pour lequel l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} Z^2\, \theta_0\,(x)\, dx$$

devienne un maximum ou un minimum, $\theta\,(x)$ et $\theta_0\,(x)$ étant deux fonctions données ». Cette question est résolue par les formules du mé-

moire [35] et la solution conduit a une nouvelle application des polynômes de Legendre. L'on a en effet le théorème suivant : « Z désignant un polynôme de degré inférieur à n et ne changeant pas de signe entre $x = -1$ et $x = +1$, la valeur numérique du rapport

$$\int_{-1}^{+1} x\, Z\, dx : \int_{-1}^{+1} Z\, dx$$

ne peut respectivement surpasser la plus grande racine des équations $X_{l+1} = 0$ et $X_{l+1} + X_l = 0$, selon que $n = 2l$ ou $2l - 1$ ».

Comme application de ce théorème Tchébychef donne la limite du rapport entre le segment d'une courbe et le triangle, formé par la courbe et deux droites parallèles aux axes des coordonnées.

VI.

Valeur limites des intégrales et des sommes.

Dans la formule générale de l'interpolation parabolique (voir chap. IV) les coefficients sont formés par les sommes

$$\sum_i \psi_n(x_i) \,.\, \theta^2(x_i) \,.\, F(x_i)$$

et, lorsque nous remplaçons $\theta^2(x)$ par une fonction $f(x)$ qui doit rester toujours positive, ces sommes sont evidemment composées linéairement au moyen des sommes

$$\sum_i x_i^0 f(x_i),\ \sum_i x_i f(x_i),\ \sum_i x_i^2 f(x_i), \ldots\ldots$$

Ces dernières sommes présentent une grande analogie avec les derivées $f'(x)$, $f''(x)$, ... Comme ces derivées servent à former les polynômes qui se rapprochent le plus d'une fonction quelconque *dans le domaine d'une valeur* $x = a$, les sommes en question servent à former les expressions qui se rapprochent le plus d'une fonction donnée *dans un intervalle quelconque.* Dans le cas où les valeurs de x forment un continuum linéaire ces sommes remarquables se ramènent aux intégrales

$$\int f(x)\, dx,\ \int x\, f(x)\, dx,\ \int x^2 f(x)\, dx, \ldots.$$

Dans une mémoire de 1873 [44] Tchébychef a donné sans demonstration les resultats qu'il a obtenus relativement aux valeurs limites de l'intégrale

$$\int_u^v f(x)\,dx$$

lorsque, par hypothèse, les valeurs des intégrales

$$(1) \qquad \int_a^b x^k f(x)\,dx = A_k, \quad (k = 0, 1, \ldots n-1)$$

prises pour des intervalles plus étendus ($a < u$, $b > v$) sont données et la fonction $f(x)$ reste positive entre $x = a$ et $x = b$. Si par exemple le nombre de ces intégrales connues est pair ($n = 2m$) les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_u^v f(x)\,dx$$

ne peuvent être obtenues que dans le cas où u et v vérifient une certaine équation qui dépend des valeurs connues des intégrales (1).

Pour obtenir cette équation ainsi que les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_u^v f(x)\,dx$$

où u et v doivent vérifier l'équation precitée, on développe l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(x)\,dx}{z-x}$$

en une série procédant suivant les puissances descendantes de z. Aux termes près de l'ordre $\frac{1}{z^{2m}}$, on a

$$\int_b^a \frac{f(x)\,dx}{z-x} = \frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z^2} + \cdots\cdots + \frac{A_{2m-1}}{z^{2m}}.$$

D'autre part si l'on développe la fraction rationelle

$$\frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z^2} + \cdots\cdots + \frac{A_{2m-1}}{z^{2m}}$$

en fraction continue, cette fraction continue sert à determiner l'équation

vérifiée par les valeurs de u, v et les valeurs limites correspondantes de l'intégrale $\int_u^v f(x)\,dx$.

Soit $\frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}$ la m-ième réduite de la fraction continue; u et v doivent être les racines z_l et z_n de l'équation $\psi_m(z) = 0$, et les limites des valeurs de l'intégrale $\int_{z_l}^{z_n} f(x)\,dx$ sont les deux résidus intégraux:

$$\left[\frac{\psi_m(z)}{\psi_m(z)}\right]_{z_l+\omega}^{z_n-\omega} \text{ et } \left[\frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}\right]_{z_l-\omega}^{z_n+\omega},$$

ω désignant une quantité positive infiniment petite. Ces formules sont tirées de formules plus générales relatives à l'intégrale $\int_a^v f(x)\,dx$, où v est un valeur quelconque comprise entre a et b. Pour les valeurs limites de cette intégrale on a les formules suivantes:

$$(2)\quad \begin{cases} \int_a^v f(x)\,dx \leqq \left[F(z)\right]_{a-\omega}^{v+\omega} \\ \int_a^v f(x)\,dx \geqq \left[F(z)\right]_{a-\omega}^{v-\omega}, \end{cases}$$

où $F(z)$ est une fraction rationelle

$$\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)} = \frac{\varphi_m(z)\,Z - \varphi_{m-1}(z)}{\varphi_m(z)\,Z - \psi_{m-1}(z)},$$

Z est une certaine fonction du premier degré en z, dont l'expression en fonction de v est plus simple lorsque n est pair que lorsque n est impair.

Les formules (2) peuvent facilement se mettre sous la forme

$$(3)\quad \begin{cases} \int_a^v f(x)\,dx \leqq \left[\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)}\right]_{a-\omega}^{v} + \frac{1}{2}\,\frac{\Phi_0(v)}{\Phi_1'(v)} \\ \int_a^v f(x)\,dx \geqq \left[\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)}\right]_{a-\omega}^{v} - \frac{1}{2}\,\frac{\Phi_0(v)}{\Phi_1'(v)} \end{cases}$$

qui fait voir que le résidu integral $\left[\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1'(z)}\right]_{a-\omega}^{v}$ fournit la valeur approchée de l'intégrale $\int_a^v f(x)\,dx$ avec une erreur qui ne surpasse pas la valeur numérique de $\frac{1}{2}\,\frac{\Phi_0(v)}{\Phi_1'(v)}$. De la sorte, lorsque les intégrales (1) coincident pour deux fonctions $f(x)$ et $f_1(x)$, la différence entre les deux intégrales $\int_a^v f(x)\,dx$ et $\int_a^v f_1(x)\,dx$ ne peut surpasser $\frac{\Phi_0(v)}{\Phi_1'(v)}$.

En s'appuyant sur les formules fondamentales de la théorie des fractions continues (voir chapitre IV), Tchébychef montre [70] que dans le cas considéré

$$(4)\quad \frac{\Phi_0(v)}{\Phi_1'(v)} = \frac{1}{\alpha_1\,\psi_0^2(v) + \cdots + \alpha_m\,\psi_{m-1}^2(v) + \gamma\,\psi_m^2(v)}$$

Comme exemple, il discute le cas où

$$a = -\infty\,,\ b = +\infty\,,\ f_1(x) = \frac{q}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{q^2x^2}{2}}.$$

Dans cette hypothèse on a

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\,dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f_1(x)\,dx = 0,\\
&\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_1(x)\,dx = \frac{1}{q^2}, \ \ldots\ldots\ldots\\
&\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-2} f_1(x)\,dx = \frac{1\ 3.\ 5\ \ldots\ldots\ (2m-3)}{q^{2m-2}},\\
&\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1} f_1(x)\,dx = 0
\end{aligned}\right.$$

Si donc les intégrales correspondant à une autre fonction $f(x)$ ont mêmes valeurs, la différence entre les intégrales $\int_{-\infty}^{v} f(x)\,dx$ et

$\int_{-\infty}^{r} f_1(x)\,dx$ sera exprimée par la formule (4), où les fonctions $\psi_l(z)$ seront alors les polynômes de M. Hermite. Dans ce cas on peut aisément déterminer pour v quelconque la limite supérieure du second membre de la formule (4); il suffit d'évaluer la limite inférieure de la somme

$$\sum_{i=o}^{i=m-1} T_i = \sum_{i=o}^{i=m-1} \frac{\psi_i^2(v)}{\Gamma(i+1)\,q^{2i}}.$$

Une analyse remarquable donne la résolution de la question posée. Comme on a

$$\sum_{0}^{\infty} \underset{l}{T}\, t^l = \theta(t) = \frac{e^{\frac{q^2 v^2 t}{1+t}}}{\sqrt{1-t^2}}$$

il s'agit de déterminer la somme $\sum_{0}^{m-1} T_l$ d'après la valeur connue de la fonction $\sum_{0}^{\infty} T_l\, t^l = \theta(t)$. L'on n'a qu'à rechercher la valeur de l'intégrale $\int_{0}^{m-1} Y\, t^x\, dx$ au moyen des valeurs connues des intégrales

$$\int_{0}^{\infty} Y\, t^x\, dx, \quad \int_{0}^{\infty} x\, Y\, t^x\, dx, \quad \int_{0}^{\infty} x^2\, Y\, t^x\, dx$$

et l'on y parvient au moyen de la théorie générale des valeurs limites des intégrales. Pour la limite inférieure de la somme $T_0 + T_1 + \cdots\cdots + T_{m-1}$ Tchébychef trouve l'expression

$$M = \frac{2\,(m-3)^5 \sqrt{m-1}}{3\sqrt{3}\,(m^2-2m+3)^{\frac{3}{2}}} \; \frac{1}{(q^2 v^2+1)^5} \qquad (*)$$

(*) M. Sonine a remplacé cette limite par une autre $\sqrt{\frac{2m-1}{\pi}}$ beaucoup plus simple et de plus indépendante de v. (*Sur l'exactitude de la détermination des valeurs limites des intégrales* (Mém. de l'Acad. de St. Petersb.. 1892).

De tout ce qui vient d'être dit résulte le théoreme suivant: « Si pour une fonction $f(x)$ qui reste toujours positive les équations (5) ont lieu, la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{v} f(x)\,dx$ reste comprise entre les limites

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{q\,v}{2}} e^{-x^2}\,dx \mp \frac{1}{M} \text{ »}$$

nous verrons dans le Chap. suivant une importante application de cet théorème à une des propositions fondamentales de la théorie des probabilités.

Ajoutons encore que le problème aualogue à celui qui consiste à trouver la limite de la somme $\sum_{0}^{m-1} T_l$, au moyen de la valeur de la somme $\sum_{0}^{\infty} T_l\, t_l$, a été traité dans le mémoire [69]. Il s'agit dans ce mémoire de la détermination des limites entre lesquelles reste comprise la somme d'un nombre quelconque de coefficients successifs de la série

$$A_0 + A_1\, x + A_2\, x^2 + \cdots$$

ou de la série

$$\frac{B_1}{1^x} + \frac{B_2}{2^x} + \frac{B_3}{3^x} + \cdots,$$

au moyen des valeurs connues de ces séries, tous les termes étant supposés positifs. La question se ramène à celle de trouver les valeurs limites de l'intégrale $\int_{0}^{u} F(z)\,dz$, où l'on suppose que $F(z)$ est une fonction qui ne devient pas négative pour $z > 0$ et que la valeur de l'intégrale

$$\int_{0}^{\infty} e^{-tz}\, F(z)\,dz$$

est connue (*).

(*) Les formules de M. Tchébychef ont été démontrées et remplacées par d'autres par M. Sonine (*Une rémarque relative à la lettre de P. L. Tchébychef à Mme Koralevski*. Bulletin de l'Acad. de St. Petersb., 1895).

Les résultats cités de la théorie des valeurs limites des intégrales ont été donnés par Tchébychef, comme nous l'avons déjà dit, en 1873 sans aucune démonstration. Il s'est contenté d'y ajouter un exemple intéressant de problémes que l'on parvient à résoudre au moyen de ses formules, à savoir: « étant données la longueur, le poids, le lieu du centre de gravité et le moment d'inertie d'une droite matérielle de densité inconnue variant d'un point à l'autre de la droite, trouver les valeurs limites qui se rapprochent le plus du poids d'un tronçon de cette droite ». C'est à M. Markof que l'on doit la première démonstration des formules de Tchébychef, même généralisées pour le cas de l'intégrale $\int_u^v \Omega(x) f(x)\, dx$. Après la publication du travail de M. Markof (*) Tchébychef publia dans deux mémoires [68, 70] les résultats détaillés de ses propres récherches avec leur application au cas où l'une des fonctions a la forme

$$\frac{q}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2 x^2}{2}}.$$

Nous avons fait connaitre en partie ces résultats. Quant à la méthode qui conduisit Tchébychef à ses résultats, il ne la publia que plus tard en 1891 dans le mémoire [79]. Tchébychef y considère les sommes suivantes:

$$\sum_i x_i^k f(x_i),$$

composées des produits des valeurs positives $f(x_0)$, $f(x_1)$, ... par les puissances de quantités réelles x_0, x_1, . . . Ces sommes peuvent être régardées comme des cas particuliers de sommes plus générales $\sum_i z_i^k u_i^2$ où quelques uns des carrés u_i^2 peuvent dévenir égaux

(*) *Sur quelques applications des fractions continues algébriques.* St.-Petersb. 1884 (en russe). M. Possé a eclairci le passage des formules de M. Markof à celles de Tchébychef dans sa monographie: *Sur quelques applications des fractions continues algébriques.* St.-Pétersbourg. 1886. Tout récemment M. Markof a publié ses récherches sur des problèmes analogues au problème posé par Tchébychef dans le mémoire: *Nouvelles applications des fractions continues* (Mém. de l'Acad. de St.-Pétersb., Série VIII, Vol. III, 1895). Le problème de Tchébychef est généralisé en supposant que la fonction $f(x)$ vérifie les deux inégalités

$$L > f(x) > 0.$$

Voir aussi du même auteur: *Sur une question de minimum proposée par M. Tchébycheff* (Acta mathem. T. VIII, p. 57) et *Sur les valeurs limites des intégrales en leur rapport avec l'interpolation.* 1898.

à zéro. Pour ces sommes Tchébychef résolut le problème de trouver le maximum (ou le minimum) de la somme : $u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + \cdots\cdots + u_q^2$ où de la somme : $u_{q_1}^2 + u_{q_1+1}^2 + \cdots\cdots + u_{p-1}^2$ $(q, q_1 < p)$ lorsqu'entre les $2p$ variables :

$$z_0,\ z_1,\ z_2,\ \ldots\ldots\ z_{p-1},$$
$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots\ldots\ u_{p-1},$$

ont donne les équations de condition suivantes

$$\sum_0^p z_i^0\, u_i^2 = C_0,\ \sum_0^p z_i\, u_i^2 = C_1,\ \ldots,\ \sum_0^p z_i^{l-1}\, u_i^2 = C_{l-1}$$

Au moyen du développement en fraction continue de l'expression

$$\frac{C_0}{x} + \frac{C_1}{x^2} + \cdots\cdots + \frac{C_{l-1}}{x^l}$$

on trouve le système des valeurs $z_0,\ z_1,\ \ldots\ z_{p-1}$ qui correspondent au maximum ou au minimum, et les sommes correspondantes s'expriment alors au moyen de résidus intégraux.

Une généralisation de la question considérée dans le mémoire [74] a fait le sujet du dernier mémoire de l'illustre savant [77]. Dans ce mémoire il suppose que les sommes

$$\sum_0^p z_i^0\, u_i^2,\ \sum_0^p z_i\, u_i^2,\ \ldots$$

ne sont pas complètement connues, mais que l'on connait seulement les limites assez restreintes entre lesquelles elles sont comprises. La résolution de cette question générale repose sur les résultats du mémoire [75], où Tchébychef avait ramené la question de la détermination des réduites du développement en fraction continue d'une série

$$\frac{C_0}{x} + \frac{C_1}{x^2} + \ldots$$

à la question correspondente relative à la série

$$\frac{c_0}{x} + \frac{c_1}{x^2} + \ldots$$

les quantités c_0, c_1, ... différant plus ou moins des quantités C_0, C_1, ...

VII.

Théorie des probabilités.

Après les recherches relatives aux questions de minimum et aux expressions approchées des fonctions c'est la théorie des probabilités qui fut le sujet de prédilection du grand géomètre russe. Nous avons vu (chapitre I) qu'un de ses premiers travaux fut un essai d'analyse élémentaire de la théorie des probabilités [3]. « La théorie des probabilités », dit-il dans l'introduction de cet ouvrage, « constitue jusqu'ici une des branches le plus intéressantes et en même temps le plus difficiles de l'analyse transcendante..... En commençant par les équations qui déterminent les inconnues et en terminant par le calcul des valeurs numeriques, nous rencontrons partout l'analyse transcendante la plus élevée. Cependant si nous regardons plus attentivement les problèmes de la théorie des probabilités, nous pouvons nous convaincre qu'il est possible, outre la méthode de l'analyse transcendante, d'en employer une autre fondée sur les seuls principes de l'Algèbre ». En effet Tchébychef n'emploie dans son essai pour la démonstration du théorème de Bernoulli que la série qui représente $log\,(1+x)$. Il expose deux démonstrations du théorème. La première donne même l'expression de la valeur de la probabilité que la différence entre le rapport du nombre d'arrivées de l'événement au nombre total des épreuves et la probabilité (chance) de l'événement ne surpasse pas une certaine limite E; seulement l'intégrale employée d'habitude est remplacée chez Tchébychef par la somme des valeurs de la fonction e^{-t^2} prises en nombre suffisamment grand. La seconde démonstration encore plus élémentaire ne donne pas l'expression de la probabilité precitée, mais démontre que, quelque petit que soit E, elle tend vers l'unité quand le nombre total des épreuves augmente indéfiniment. Le principe de cette seconde démonstration est employé par Tchébychef dans une note publiée en 1846 dans le Journal de Crelle [4] pour démontrer un théorème plus général que le théorème de Bernoulli et relatif au cas où la probabilité d'un événement varie d'une épreuve à l'autre. La démonstration que Poisson avait donné de ce théorème nommé par lui « Loi des grands nombres (*) » n'avait pas satisfait Tchébychef qui fit l'observation suivante: « Quelqu'ingénieuse que soit la méthode employée par le celébre geomètre, il reste à être impossible (*sic*) de montrer la limite de l'erreur que peut admettre son analyse

(*) *Recherches sur la probabilite des jugements.* Chap. IV.

approximative, et par cette incertitude de la valeur de l'erreur, sa démonstration n'est pas rigoureuse ». Dans la sienne Tchébychef n'emploie que les considérations les plus élémentaires à savoir, celle de la série donnant $log(1+x)$ et celle de l'expression approchée du produit $1.2\ldots x$.

De même que l'analyse de Poisson, celle exposée par Laplace dans le chapitre de sa *Théorie analytique des Probabilités,* qui traite de la probabilité des erreurs des résultats moyens d'un grande nombre d'observations et des résultats moyens les plus avantageux, ne pouvait pas contenter un esprit aussi rigoureux que celui de Tchébychef (*). L'analyse qu'avait employé Laplace pour démontrer que la méthode des moindres carrés est la plus avantageuse dans le cas d'un grand nombre d'observations, et cela quelle que soit la loi de la probabilité des erreurs, a, comme Bienaymé l'a dit avec raison (**), une beaucoup plus grande portée; la théorie des erreurs n'est en effet qu'un cas particulier de la théorie des valeurs eventuelles quelconques. En vertu du théorème fondamental de cette dernière théorie, la moyenne arithmétique des valeurs d'un événement quelconque, si le nombre des epreuves augmente indéfiniment, tend avec une probabilité approchant de la certitude vers une valeur constante. Tchébychef donná deux demonstrations de ce théorème que Poisson avait nommé la seconde partie de la loi des grands nombres et au quel Tchébychef donna le nom de théorème des valeurs moyennes. L'une d'elles tout-à-fait élémentaire confirme l'idée tres juste de Bienaymé (***) que si l'on veut se borner à démontrer la méthode des moindres carrés en ce qui touche la combinaison des observations sans calculer la grandeur de l'erreur, et seulement en prouvant que cette méthode opère de manière à la rendre minimum, il ne faut plus d'analyse transcendante ni même de grande contention d'esprit. En effet des transformations algébriques très simples suffisent à Tchébychef pour demontrer le théorème qu'il enonce de la manière suivante: « Si les espérances mathématiques de quantités u_1, u_2, u_3, ... et de leurs carrés u_1^2, u_2^2, u_3^2, ... ne dépassent pas une limite finie

---

(*) Plusieurs autres auteurs ont exprimé des doutes sur la rigueur de l'analyse de Laplace, par exemple M. Leslie Ellis (voir Todhunter, *History ofthe mathematical Theory of Probability*. Cambridge 1865, p. 561) et M. Glaisher. Ce dernier s'est exprimé ainsi : « It is well known that all the proofs that have been given of the method of Least Squares contain, to say the least, some points of difficulty, and on this account any new investigations of the result is necessarily a matter of much interest ». (Mem. of R. Astron. Society. Vol. 39, 1871).

(**) Considérations à l'appui de la découverte de Laplace sur la loi de probabilité dans la méthode des moindres carrés (Journ. de Liouvillé, Série 2e. Tome XII, 1867, p. 160).

(***) Loc. cit., p. 161.

quelconque, la probabilité que la différence entre la moyenne arithmétique d'un nombre N de ces quantités et la moyenne arithmétique de leurs espérances mathématiques sera moindre qu'une quantité donnée se réduit à l'unité, quand N devient infini » [34]. La loi des grands nombres et le théorème de Bernoulli relatif à la répetition des événements ne sont que de simples corollaires de ce théorème; on les obtient en supposant que chacune des quantités u_i ne peut admettre que deux valeurs: l'unité et zéro.

La demonstration élémentaire donnée par Tchébychef suffit pour revèler l'influence des grands nombres. Mais les calculs numériques de la méthode des moindres carrés où il est question d'estimer la précision des nombres trouvés par cette méthode exigent autre chose; ces calculs sont fondés sur la possibilité de représenter la loi des probabilités des erreurs par la fonction $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$, que Gauss a trouvée être une conséquence de son postulat de la moyenne arithmétique. L'analyse de Laplace a eu pour but de démontrer que pour un grand nombre d'observations quelle que soit la loi de la probabilité des erreurs, celle ci peut être representée par une fonction de la forme indiquée. Tchébychef dans la théorie plus générale des valeurs eventuelles quelconques a remplacé l'analyse donnée par Laplace (*) par une autre fondée sur la théorie des valeurs limites des intégrales.

Supposons que nous ayons les valeurs eventuelles $u_1, u_2, \ldots$ pour lesquelles les espérances mathématiques sont égales à zéro, tandis que les ésperances mathématiques de toutes leurs puissances ne surpassent pas une certaine limite finie. Alors une analyse analogue à celle employée par Laplace et par Bienaymé (**) donne le résultat suivant: « En désignant par $f(x)dx$ la probabilité que

$$\frac{u_1 + u_2 + \cdots\cdots + u_n}{\sqrt{n}}$$

soit compris entre les limites x et $x + dx$, on a, pour $n = \infty$, quelques soient les lois de la probabilité des valeurs eventuelles u_i, l'egalité suivante exacte aux puissances près d'ordre $2m - 1$ d'une quantité arbitraire s

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} f(x)\, dx = e^{\frac{s^2}{2q^2}}, \quad \text{où} \quad \frac{1}{q^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} a_i^{(2)},$$

(*) *Théorie analytique des probabilités.* Livre II, chap. 7.

(**) *Mémoire sur la probabilité des erreurs d'après le méthode des moindres carrés* (Mém. des sav. étrang. T. XV, 1858).

$u_i^{(2)}$ désignant l'espérance mathématique du carré de la valeur u_i ». D'après cette égalité les valeurs des intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\, dx \quad (k = 0, 1, \ldots, 2m-1)$$

coincident avec les intégrales correspondantes pour la fonction

$$f(x) = \frac{q}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2 x^2}{2}}$$

Ce résultat permet d'appliquer le théorème que nous avons cité dans le chap. V, et d'après lequel pour $n = \infty$ et pour m quelconque la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{v} f(x)\, dx$$

peut être remplacée par celle de l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2} dx$$

avec une erreur qui ne surpasse pas la valeur numérique de $\frac{1}{M}$. Mais $\frac{1}{M}$ tend vers zéro pour m infini, que nous employions l'expression de M donnée par Tchébychef ou bien que nous employions celle donnée par M. Sonine; on oblient donc facilement ce résultat: « Pour $n = \infty$ l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t}^{t'} e^{-t^2} dt$$

représente la probabilité que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{i=n} u_i$$

reste compris entre les limites

$$\frac{\sqrt{2}}{q} t \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{2}}{q} t',$$

c'est-à-dire, en vertu de la relation

$$\frac{1}{q^2} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{t=n} a_t^{(2)},$$

que Σu_i reste compris entre les limites

$$t \sqrt{2 \sum_t a_t^{(2)}} \quad \text{et} \quad t' \sqrt{2 \sum_t a_t^{(2)}} \ (^*).$$

L'analyse par laquelle Tchébychef parvient à ce théorème, qui peut servir de fondement à la méthode de moindres carrés, sera toujours un de ses plus beaux titres de gloire.

VIII.

Série de Lagrange — Mécanique appliquée — Géométrie des surfaces (déformation des plans-tissus) — Mécanismes de Tchébychef.

Les chapitres précédents ont été consacrés aux travaux analytiques les plus importants de l'illustre savant. Il nous reste à mentionner quelques autres recherches du domaine de l'analyse qui ne se rattachent pas aisément aux travaux dont nous avons jusqu'ici rendu compte.

Tel est par exemple un mémoire sur la série de Lagrange [19] où Tchébychef emploie une formule générale d'intégration par parties (**) pour en déduire la série de Lagrange avec son terme complementaire. En appliquant la valeur de ce terme complementaire aux développements de l'anomalie excentrique et du rayon vecteur selon les puissances croissantes de l'excentricité, Tchébychef trouva que ces développements sont toujours convergents si la valeur de l'excentricité est inférieure à la limite $k = 0{,}66274$. C'est ce que Laplace avait trouvé le premier et ce que Cauchy avait demontré par une méthode plus générale. Mais Tchébychef trouva de plus que dans ces développements l'erreur est toujours inférieure au rapport de l'excentricité à 0,66274, élevé à un degré égal au nombres des termes conservés de la série.

(*) D'après la première demonstration du théorème des valeurs moyennes [34], la probabilité que Σu_i reste comprise entre les limites

$$\pm a \sqrt{\Sigma a_i^{(2)}} \quad \text{surpasse} \quad 1 - \frac{1}{\alpha^2}.$$

(**) Cette formule a été trouvée aussi par M. Bertrand (Journ. de Liouville, T. VIII, 1843). Voir son *Calcul intégral*, p. 10.

Nous indiquerons aussi un travail [50] où Tchébychef généralise la formule remarquable de Catalan

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

en y remplacant les numérateurs par les termes d'une série quelconque ce qui donne comme résultat une expression de la constante $4a \log 2 - \frac{\pi^2}{6}$ au moyen des fonctions $E(a), E(2a), E(3a), \ldots, E(x)$ designant le plus grand nombre entier contenu dans x. Ajoutons encore que M. Hermite dans son *Cours* cite une proposition intéressante de Tchébychef relative au caractère arithmétique des coefficients rationnels de séries qui résultent d'une fonction composée de fonctions algébriques, logarithmiques et exponentielles en nombre fini [79].

Passons maintenant à une série de travaux où les méthodes analytiques générales exposées dans les chapitres précedents sont appliquées à des questions de la mécanique industrielle. Nous avons vu que Tchébychef, dès son plus jeune âge, manifesta de l'interêt pour les applications de la mécanique. Ce goût se reveilla de nouveau lorsqu'en 1849-1851 il professa la mécanique industrielle à l'Université de Saint-Pétersbourg et au Lycée Impérial Alexandre I. En 1852 il fit un voyage dont le but principal était, comme le fait voir un interessant compte-rendu [78], d'étendre ses connaissances en mécanique appliquée en visitant des centres industriels. Le Conservatoire des Arts et Métiers à Paris, le chemin de fer de Paris à Saint-Germain, les mines et les forges de Lorraine, les manufactures de papier d'Angoulême et leurs turbines, les moulins à vent de Lille et les fabriques d'armes à Châtellerault interessérent vivement le jeune professeur russe; mais ce qu'il cherchait tout particulierement c'était les données nécessaires pour ses recherches sur la théorie des parallélogrammes de Watt. Il poursuivit le même but en Angleterre où il put voir les machines construites par Watt même. C'est après ces voyages qu'il publia son premier mémoire sur la théorie des parallélogrammes dont nous avons parlé dans le chap. II.

Ses études sur le parallélogramme de Watt, continuées à plusieures reprises [28], [60] conduiserent Tchébychef à l'étude générale des systemes articulés. Sous l'influence de Tchébychef, un jeune homme de talent, M. Lipkine, retrouva en 1871 la solution du problème du guidage exact du mouvement rectiligne d'un point qui avait été donné par Peaucellier en 1864. Les belles decouvertes de Peaucellier et de Lipkine et les travaux de Tchébychef relatifs au guidage approché au moyen de systèmes articulés attirérent sur ces sujets l'attention

de plusieurs éminents géométres (*). Tchébychef d'ailleurs pendant toute sa vie s'interessa aux systèmes articulés; le cas seul du « *trois-barres* » a été l'objet de plusieurs mémoires [37, 52, 56, 57, 58]. C'est à l'aide des systèmes articulés que Tchébychef réalisa le mouvement parallèle à un plan dans sa machine qui marche [91] et dans quelques autres mecanismes; les systèmes articulés peuvent, comme il l'a montré dans le mémoire [67], transformer un mouvement de rotation en un mouvement circulaire ou rectiligne; enfin la règle inventée par Tchébychef pour tracer des arcs de cercle de grand rayon [85] est fondée sur le même principe.

C'est aussi à l'étude des systèmes articulés qu'est intimement lié un problème de la géométrie des surfaces posé par Tchébychef, problème qui nous parait destiné à un grand avenir [53]. (**). Les systèmes articulés se composent de tiges rigides assujeties à se mouvoir dans un même plan de manière à laisser leurs angles variables. Il y a une analogie evidente entre cette théorie des systèmes articulés et celle de la déformation des tissus ou, selon l'expression de Tchébychef de la « coupe des vêtements ». En effet dans toute déformation d'un tissu, formé par deux systèmes des fil qui se croisent à angle droit, le point d'intersection de deux fils ne change pas, et les longueurs de ces fils restent les mêmes. C'est l'angle seul de ces fils qui varie. Il s'agit par conséquent dans cette question, au moyen d'un choix convenable des courbes coordonnées de ramener l'élement linéaire de la surface proposée à la forme

$$du^2 + dv^2 + 2du\, dv \cos \alpha,$$

où α est une fonction quelconque de u et de v. En prenant comme point de depart certaines hypothèses sur la contexture des tissus, Tchébychef donne des formules qui permettent de déterminer les contours qui doivent limiter deux, trois ou quatre morceaux d'étoffe pour que l'on puisse recouvrir le plus exactement possible la surface d'une sphère, pour l'*habiller*, selon l'expression de Tchébychef (***).

Ce ne furent pas les systèmes articulés qui seuls interessèrent Tché-

---

(*) V. Liguine. *Liste de travaux sur les systèmes articulés.* (Bulletin de M. Darboux, 2.e série, t. VII, p. 145-160). L'historique et l'exposition de la question des système articulés se trouvent dans les *Leçons de cinématique* de M. Kœnigs, (Caris 1897) Chap. XI.

(**) Il parait que les travaux interessants de E. Lucas sur la géométrie du tissage n'ont pas été sans influence sur le problème posé par Tchébychef.

(***) G. Darboux. *Leçons sur la théorie général des surfaces.* Troisième partie, p. 133. Voir aussi: Darboux, *Considérations sur les équations différentielles qui se rapportent à la déformation des surfaces.* (Ass. Franc. pour l'avanc. des sciences. Congrès de Paris),

bychef. Les recherches sur les fonctions qui s'écartent le moins de zéro, faites eu vue de la théorie des parallélogrammes, trouvèrent aussi leur emploi dans la question du régulateur à force centrifuge. On sait que ce régulateur a pour but de limiter les écarts de la vitesse moyenne lorsque le travail est soumis à des irregularités; à cet effet, le rapport entre les vitesses correspondant aux angles formés par les tiges à boules avec l'axe vertical doit se rapprocher autant que possible de l'unité, ce qui fait voir comment la théorie des fonctions qui s'écartent le moins possible de zéro s'introduit dans cette question (*).

Non seulement Tchébychef à inventé des méthodes mathématiques de la plus haute importance pour la théorie des mécanismes et les a appliquées pour calculer a priori les dimensions de leurs parties, mais encore, épris dès sa jeunesse des travaux mécaniques, comme le furent Newton et Watt, il appliqua ses facultés d'invention à la création de quelques machines absolument nouvelles. La machine arithmétique à mouvement continu, dont un exemplaire se trouve à Paris au Conservatoire des Arts et Métiers, sa règle pour le tracé des arcs de grand rayon qu'il envoyá à l'Exposition de Londres en 1876, le fauteuil-vélocipède, envoyé à l'Exposition de Chicago, resteront toujours comme témoignages de sa faculté d'invention.

Pour terminer cet article nous donnons ici la liste des mécanismes dus à Tchébychef, et qui depuis sa mort font partie du musée de mécanique appliquée de l'Université de Saint-Pétersbourg (**); nous y ajoutons l'indication des mémoires correspondants:

1. Parallélogramme de Tchébychef (modèle en bois) [37].
2. Machine arithmétique pour l'addition et la soustraction [62, 81, 82].
3. Règle articulée flexible pour le tracé d'arcs de grand rayon [86].
4. Modèle d'un mécanisme qui marche à la façon du cheval [87].
5. Deux modèles de mécanismes pour la transformation d'un mouvement alternatif en un mouvement continu de rotation (modèle en bois).
6. Fauteuil-vélocipède.
7. Une machine pour la séparation du grain au moyen l'amplitude du jet.
8. Un modèle de presse en bois faite par Tchébychef même.
9. Regulateur a force centrifuge avec boules et contre-poids constant [41, 46].

(*) La théorie detaillée du regulateur isochrone de Tchebychef se trouve dans l'ouvrage de M. Résal, *Traité de Mécanique générale*, (Paris 1876). Tome III, p. 208.

(**) Nous devons cette liste à l'obligeance du conservateur du musée M. Mestchersky.

10. Regulateur a force centrifuge avec boules et contre-poids variable [41, 46].

11. Sept modèles des mécanismes articulés de sa forme discutée dans le mémoire [72] (*).

IX.

Considérations générales sur l'oeuvre scientifique de Tchébychef.

Nous espérons que ce court aperçu des travaux de Tchébychef suffit pour donner une notion du caractère général de ses profondes et originales recherches.

Après avoir essayé son talent pour l'analyse mathématique sur quelques problèmes ardus de la théorie des nombres, présentant un grand intérêt pour les purs mathématiciens, mais restant sans application concrète, Tchébychef laisse de côte ces questions et, suivant les penchants naturels de son esprit, il porte toute son activité sur la recherche de méthodes nouvelles en mathématiques convenant à la résolution de questions ayant trait aux applications. Tchébychef jusqu'à la fin de sa vie travaille dans cet ordre d'idées, et ses decouvertes le rangent parmi les génies mathématiques les plus originaux de notre epoque. La voie decouverte par lui est si feconde, le nombre des questions qui s'y présentent est si grand que Tchébychef a pu fonder une école nationale de mathématiciens russes formant par la direction de ses travaux un courant original dans la science mathématique du XIXème siècle.

De même que l'histoire de la philosophie nous présente des époques ou dominent successivement l'idéalisme et l'empirisme, de même les mathématiques pures peuvent aussi être mises en comparaison avec un pendule qui oscille entre la généralisation, l'abstraction et la rigueur logique des principes et entre à l'étude des problèmes concrets et particuliers. C'est ainsi que l'époque d'Euler et de Lagrange où sont posées les bases de nombreuses méthodes mathématiques nouvelles pour la resolution de questions concretes fut suivie par une autre periode à laquelle sont intimement les grands noms de Gauss et de Cauchy et qui est caracterisée au plus haut degré par le rôle joué par la théorie des fonctions d'une variable complexe. Les tendances de cette époque ont trouvé leur représentant typique dans Weierstrass

---

(*) Dans une communication faite en 1895 à la Société Physico-mathématique de Kasan, M. Koslof, qui travailla avec Tchébychef dans un atelier de mécanique à Saint-Petersbourg, mentionne encore quelques inventions de l'illustre savant savoir: une table qui se meut parallèlement, un balancier, un reflecteur, et un canot.

dont toute l'oeuvre scientifique exclusivement consacrée aux mathématique *pures* ne renferme qu'une courte note traitant d'un sujet de physique (*). A l'encontre de Weierstrass l'oeuvre scientifique de Tchébychef et de son école doit être caracterisée par le souci de donner les méthodes applicables aux questions pratiques. La Physique mathématique et ses méthodes générales interessait Tchébychef d'ailleurs aussi peu que la partie abstraite des mathématiques pures. Repondre aux besoins des sciences appliquées en leur fournissant des méthodes mathématiques qui ne dépassent pas la limite de la rigueur qu'on peut atteindre dans ces sciences, tel fut le souci perpetuel de Tchébychef.

Le mécanicien, l'astronome, le physicien dans la résolution définitive des questions dont ils s'occupent ne s'interessent pas pour la plupart aux recherches abstraites sur les propriétés des fonctions ou des nombres; dans la résolution finale de la question lorsqu'il s'agit de passer aux *nombres* définitifs, la fonction transcendante est le plus souvent remplacée pour la commodité du calcul par un polynôme ou par une fraction rationnelle; la pratique ne connait pas non plus la distinction entre le nombre incommensurable et le nombre commensurable qui est si importante dans la mathématique pure. Dans la résolution de toutes les questions pratiques des applications on conçoit ainsi l'importance des méthodes donnant les valeurs approchées des fonctions et permettant en même temps de trouver la limite de l'erreur inévitable (**). Dans le développement systématique des méthodes de ce genre Tchébychef n'a eu aucun rival ni prédecesseur qui lui fut comparable. On ne peut citer dans cet ordre d'idées que Poncelet qui donna les formules linéaires qui remplacent avec une grande approximation la racine carrée de la somme ou de la différence de carrés.

Dans une conversation que j'eus avec Tchébychef quelques années avant sa mort il exprima ses vues générales sur le but et les problèmes des mathématiques à peu pres dans les termes suivants où se réflète le charme que présentait toujours sa conversation pleine d'esprit. « Les mathématiques » me disait il « ont déjà traversé deux périodes: l'une où les problèmes ont été posés par les dieux (par exemple le problème de la duplication du cube) et l'autre ou c'étaient des demi-dieux, comme Fermat, Pascal et autres qui les posaient; nous sommes aujourd'hui entrés dans la troisième periode où ce sont les

---

(*) Ces idées ont été developpées dans un article publié en 1886 dans le Bulletin de la Société physico-mathématique de Kasan sous le titre: *Du rôle du Professeur Weierstrass dans le développement moderne des mathématiqaes.*

(**) Voir sur ce sujet les idées importantes exprimées recemment par M. Klein (*Evanston Colloquium*, traduction de M. Laugel, p, 46-50), M. Poincaré (discours de Zurich) et M. Laisant (*La mathématique*, 1898, p. 145).

besoins de l'humanité qui soulèvent les questions à résoudre ». Dans un discours prononcé en 1856 et consacré au problème des cartes géographiques Tchébychef avait développé les mêmes idées [18]: « Le rapprochement, de la théorie et des applications donne les resultats les plus féconds et ce ne sont pas les seules applications qui en profitent; la science elle même se développe sous l'influence de celles-ci, parceque ce rapprochement fournit de nouveaux sujets d'étude ou de nouveaux points de vue dans anciens sujets d'étude. Si la théorie fait de grands progrès quand les anciennes méthodes recoivent de nouveaux développements ou trouvent de nouvelles applications, elle progresse encore davantage lorsqu'elle découvre de nouvelles méthodes; c'est alors que la science trouve dans les applications un guide sur l'activité *pratique* de l'homme présente une diversité extraordinaire, et pour y repondre, la science doit posséder un grand nombre de méthodes. Mais de toutes ces méthodes, celles-là ont une importance toute particulière qui sont indispensables pour résoudre les différentes modifications du problème qui régit toute cette activité: *comment faut-il se servir de ses moyens pour se procurer le plus grand avantage possible?* »

Ce sont à ces vues générales sur le but des mathématiques que correspondent les principales recherches de Tchébychef: les questions de maximum et de minimum d'un genre different de celles qui conduisirent à l'invention du calcul differentiel et du calcul des variations, la recherche des valeurs approchées des nombres, des fonctions, des intégrales, recherches intimement liées à la théorie des fractions continues, enfin ses belles decouvertes dans le domaine de la théorie des probabilités, un des sujets favoris de Tchébychef, qui regardait cette théorie comme « la base de toutes les connaissances fondées sur les observations et les temoignages ».

Au commencement du siècle qui finit Napoleon indiquait à l'Institut de France le programme suivant: « Rendez moi compte », disait il, « des progrès de la science depuis 1789, de son état actuel, et dites-moi quels sont les moyens propres à les activer ». Si les congrès internationaux de mathématiciens qui ont été inaugurés par le congrès de Zurich se posent relativement aux mathématiques modernes ce programme qui repond au voeu des savants de tous les pays et à un besoin scientifique pressant, s'ils publient de tels comptes-rendus, c'est grâce à Lobatchewsky, à Ostrogradsky, à Tchébychef et son école que la science mathématique russe y tiendra sans doute une place honorable.

Kasan, 15 Avril 1898.

LISTE DES TRAVAUX DE P. TCHÉBYCHEF (*)

1. 1843. *Note sur une classe d'intégrales définies multiples.* Journ. de Liouville, t. VIII.
2. 1844. *Note sur la convergence de la série de Taylor.* Journ. de Crelle, t. 28.
3. 1845. *Essai d'une analyse élémentaire de la théorie des probabilités.* Thèse, Moscou (66 p.; en russe).
4. 1846. *Démonstration elémentaire d'une proposition générale de la théorie des probabilités* (extrait du mémoire précedent). Journ. de Crelle, t. 33.
5. 1848. *Sur la fonction qui détermine la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée.* Mém. des savants étrang. prés. à l'Acad. de St. Pétersbourg, t. VI. Journ. de Liouville, t. 17, 1852. Appendice III à la « Théorie des congruences » [voir n. 6].
6. 1849. *Théorie des congruences.* St. Pétersb. 2e éd. 1879, (en russe). — *Theorie der Congruenzen.* Deutsch mit Autorisation des Verfassers herausgegeben von H. Schapira. Berlin, 1888. — *Teorica delle congruenze.* Traduzione italiana con aggiunte e note di I. Massarini. Roma, 1895.
7. 1849. *Index systematique et raisonné des œuvres arithmétiques d'Euler* par MM. Bouniakovsky et Tchébychef. Leonh. Euleri Commentationes arithmeticae collectae, vol. I.
8. 1850. *Memoire sur les nombres premiers.* Mém. des sav. étrang., prés. à l'Acad. de St. Pétersbourg, t. VII. Journal de Liouville, t. XVII, 1852.
9. 1851. *Sur les formes quadratiques.* Journ. de Liouville, t. XVI.

(*) Cette liste est la réproduction de la liste redigée par M. A. Liapounof, Professeur à l'Université de Kharkov, modifiée et completée par MM. Loria et Vassilief.

10. 1851. *Note sur différentes séries.* Ib.
11. 1853. *Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes* (partie I). — Mém. des sav. étr. prés à l'Acad. de St. Pétersbourg, t. VII.
12. 1853. *Sur l'intégration des différentielles irrationnelles.* Journ. de Liouville, t. XVIII.
13. 1853. *Lettre à M. Fuss sur un nouveau théorème relatif aux nombres premiers contenues dans les formules* $4n+1$ *et* $4n+3$. Bulletin de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XI, 1853.
14. 1854. *Sur l'intégration des différentielles qui contiennent une racine carrée d'un polynôme du troisième ou du quatrième degré.* Mém. de l'Acad. de S. Pétersb., IV Série, t. VI, 1857. Journ. de Liouville, Série II, t. II, 1857.
15. 1855. *Sur les fractions continues* (en russe). Mém. scientifiques de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. III. Journ. de Liouville, Série II, t. III, 1858.
16. 1855. *Sur une formule d'Analyse* (communication lue à l'Acad. le 20 octobre 1854). Bulletin Phys.-Mathém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XIII. Mélanges Math. et Astron., t. II, livrais. 2 et 3. Journ. de Crelle, t. 53.
17. 1856. *Sur la construction des cartes géographiques.* Bulletin Phys.-Math. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XIV, N. 17. Mélanges Math. et Astr., t. II, livr. 5, 1857.
18. 1856. *Sur la construction des cartes géographiques.* Discours écrit pour la séance solennelle du 8 Février 1856 de l'Université de St. Pétersbourg (en russe).
19. 1857. *Sur la série de Lagrange.* Bulletin Phys-Math. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XV, N. 19 et 20. Mélanges math. et astr., t. II, livraison 5. Journal de Liouville, Série II, t. II (avec l'omission du dernier paragraphe).
20. 1857. *Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions.* Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, Série IV, t. VIII, 1858. *Sur les questions de minima* etc. (extrait du mém. précedent). Bulletin Phys.-Math. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XVI, N. 10. Mélanges Mathém. et Astron., t. II, livraison 6.
21. 1858. *Sur une nouvelle série* (communication lue le 8 oct. 1858). Bull. Phys.-Math. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XVII, N. 16. Mélanges Math. et Astr., t. II, livraison 6, 1859.
22. 1858. *Sur l'interpolation dans le cas d'un grand nombre de données fournies par les observations.* Mém. de l'Acad. de St. Pétersb., Série VII, t. I, 1859. *Sur l'interpolation des valeurs fournies par les observations.* (extrait du mém. préced). Bullet. Phys.-

Math. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XVI, N. 23. Mélanges Math. et Astron., t. II, livraison 6.

23. 1859. *Sur le développement des fonctions d'une seule variable* (communication lue le 14 octobre 1859). Bulletin de l'Acad. de St. Petersb., t. I. Mélanges Math. et Astronom., t. III, livraison 2.

24. 1859. *Série de Tchebycheff* (extrait du mém. préced.). Nouv. Ann. de Math., t. XVIII, 1859.

25. 1859. *Sur l'interpolation par la méthode des moindres carrées.* Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, Série VII, t. I.

26. 1860. *Sur l'intégration de la différentielle.*

$$\frac{(x + A)\,dx}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}}$$

Bulletin de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. III. Mélanges Math. et Astr., t. III, livraison 3. Journal de Liouville, Série II, t. IX, 1864.

27. 1860. *Sur l'intégration des différentielles irrationnelles* (extrait du mém. préced.). Comptes rendus, t. LI. — Journal de Liouville, II Série, t. IX.

28. 1861. *Sur une modification du parallélogramme articulé de Watt.* Bulletin de l'Acad de St. Pétersbourg, t. IV. Mélanges Math. et Astr., t. II, livraison 4.

29. 1864. *Sur l'interpolation* (en russe). Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. IV (appendice 5).

30. 1865. *Sur l'intégration des differentielles qui contiennent une racine cubique* (en russe). Ib., t. VII (appendice 5).

31. 1866. *Sur les fractions continues algébriques* (Lettre adressée à M. Braschman). Journ. de Liouville, Série II, t. X. — *Sur le developpement des fonctions en series au moyen des fractions continues* (Lettre à M. Braschman) (en russe). Mathematik. Sbornik, t. I.

32. 1866. *Sur le developpement des fonctions en séries au moyen des fractions continues.* (en russe). Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. IX (appendice 1).

33. 1866. *Sur une question arithmétique* (en russe). Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. X (appendice 4).

34. 1866. *Des valeurs moyennes* (en russe). Mathematik. Sbornik., t. II, 1867. Journal de Liouville, Série II, t. XII, 1867.

35. 1867. *Maxima et minima des sommes composées de valeurs d'une fonction entière et de ses derivées* (en russe). Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XII (appendice 3). Journal de Liouville, II Série, t. XIII, 1869 (traduction de M. de Khanikof).

36. 1867. *Sur l'intégration des differentielles les plus simples parmi celles qui contiennent une racine cubique* (en russe). Mathematik. Sbornik, t. II.
37. 1868. *Sur un mécanisme* (en russe). Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XIV.
38. 1869. *Sur les fonctions semblables aux fonctions de Legendre.* (en russe). Ib.
39. 1869. *Sur la determination des fonctions d'après les valeurs qu'elles ont pour les valeurs données de la variable* (en russe). Mathematik. Sbornik, t. IV.
40. 1870. *Sur les parallélogrammes.* Actes du 2.ème Congrès des Naturalistes russes à Moscou.
41. 1871. *Sur le regulateur centrifuge* (en russe). Annuaire de l'Ecole Technique de Moscou, 1871.
42. 1872. *Sur les roues dentées* (en russe). Ib.
43. 1873. *Sur les quadratures.* Journ. de Liouville, Série II, t. XIX, 1873. Association française p. l'Avancement etc., Session de 1873. Les Mondes, journal redigé par Moigno, t. XXX.
44. 1873. *Sur les valeurs limites des intégrales.* Journ. de Liouville, Série II, t. XIX. Assoc. franc. etc., Session de 1873.
45. 1873. *Sur les fonctions qui diffèrent le moins possible de zéro.* Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XX (appendice 1). Journ. de Liouville, Série II, t. XIX.
46. 1873. *Regulateur centrifuge.* Les Mondes, t. XXXI. Assoc. franç. etc., Session 1873.
47. 1875. *Mémoire sur les engrenages.* Cuyper, Revue universelle, t. 38.
48. 1875. *Sur l'interpolation des valeurs equidistantes* (en russe). Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XXV (appendice 5).
49. 1875. *Sur la limite du degré de la fonction entière qui satisfait à certaines conditions.* Bulletin de la Soc. Math. de France, t. III.
50. 1876. *Sur la généralisation d'une formule de M. Catalan et sur une formule arithmétique qui en résulte.* Assoc. franç. etc., Session 1876. Nouv. Corréspondance mathém. t. II.
51. 1877. *Sur les expressions approchées linéaires par rapport à deux polynomes* (en russe). Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XXX (appendice 4).
52. 1878. *Sur les parallélogrammes le plus simples symétriques par rapport à un axe.* Assoc. franç. etc., Session de Paris, 1878.
53. 1878. *Sur la coupe des vêtements.* Ib.
54. 1878. *Sur une transformation des séries numeriques.* Ib. et Nouv. Corresp. mathém., t. IV.

55. 1878. *Sur la résultante de deux forces appliquées à un seul point.* Bulletin de la Soc. Mathém. de France, t. VI.
56. 1878. *Sur les systèmes articulés les plus simples* (en russe). Mathém. Sbornik t. IX, 1879.
57. 1878. *Sur les parallélogrammes formés de trois élements et symetriques par rapport à un axe* (en russe). Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XXXIV (appendice 3).
58. 1879. *Sur les parallélogrammes formés de trois élements quelconques* (en russe). Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XXXVI (appendice 3).
59. 1880. *Sur les fonctions qui différent peu de zéro pour des valeurs données de la variable* (en russe). Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XL (app. 3).
60. 1881. *Théorème relatif à la courbe de Watt.* — Bulletin des Sciences Math. et Astr., Série II t. 5.
61. 1882. *Sur les parallélogrammes les plus simples qui donnent, avec une approximatiov du quatrième dégré, un mouvement rectiligne* (en russe). Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XL
62. 1882. *Une machine arithmétique à mouvement continu.* Revue scientifique, 2.ème Sem., N. 13.
63. 1882. *Sur le rapport de deux intégrales prises entre les mêmes limites d'intègration* (en russe). Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XLIV (appendice 2).
64. 1883. *Sur les expressions approchées des intégrales au moyen d'autres intègrales prises entre les mêmes limites* (en russe). Communications à la Soc. Mathém. de Kharkow, 1882, II.
65. 1883. *Sur une série qui donne les valeurs limites des intégrales dans le cas de la decomposition en facteurs de la fonction integrée* (en russe). Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XLVII (appendice 1).
66. 1884. *Sur les fractions algébriques qui representent approximativement la racine carrée d'une variable comprise entre les limites données.* Bulletin de la Soc. Math. de France, t. XII.
67. 1885. *Sur la transformation du mouvement rotatoire en mouvement sur certaines lignes à l'aide des systèmes articulés.* Ib.
68. 1885. *Sur la représentation des valeurs limites des intégrales par des résidus intégraux* (en russe). Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. LI (appendice 4). Acta mathém., t. IX, 1886 (traduit par Sophie Kowalevski).
69. 1886. *Sur les sommes composées des coefficients des séries à termes positifs* (lettre adressée à Sophie Kowalevski). Acta mathém., t. IX.
70. 1886. *Sur les résidus intégraux qui donnent des valeurs appro-*

chées des intégrales (en russe). Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. LV (appendice 2). Acta mathematica, t. XII, 1889 (traduction française de I. Lyon).

71. 1887. *Sur deux théorèmes relatifs aux probabilités* (en russe). Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. LV (appendice 6). Acta mathematica, t. XIV, 1891 (traduction française de I. Lyon).

72. 1888. *Sur le système articulé le plus simple propre à produire un mouvement symetrique autour d'un axe* (en russe). Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. LX (appendice 1).

73. 1889. *Sur les expressions approchées d'une racine carrée de la variable au moyen des fractions simples* (en russe). Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. LXI (appendice 1). Acta mathematica, t. XVIII, 1894 (traduction allemande de O. Bäcklund).

74. 1890. *Sur les sommes composées des valeurs de monômes les plus simples multipliés par une fonction qui reste positive* (en russe). Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. LXIV (appendice 7).

75. 1892. *Sur le développement en fraction continue des séries ordonnées suivant les puissances positives d'une variable* (en russe). Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. LXXI (appendice 3).

76. 1892. *Sur les polynômes qui représentent le mieux les valeurs des fonctions fractionnaires les plus simples pour les valeurs de la variable, comprises entre deux valeurs données* (en russe). Mém. de l'Acad. de S. Pétersbourg, t. LXXII (appendice 7).

77. 1894. *Sur les sommes qui dépendent des valeurs positives d'une fonction quelconque* (en russe). Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, Série VIII, t. I, 1895.

(*) 78. 1852. *Note sur le voyage à l'étranger fait par Tchébychef en 1852* (en russe). Actes de l'Université Impériale de St. Pétersbourg pour l'année 1852. St. Pétersbourg, 1853.

79. *Caractère des coefficients d'une série de la forme*

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots\cdots$$

qui résulte d'une fonction composée de fonctions algébriques, logarithmiques et exponentielles en nombre fini. Application à la série $\Sigma \frac{x^n}{n^4+1}$. Cours de M. Hermite 4.ème éd., 1891, p. 197. Voir aussi: A. Markof, *Sur les facteurs premiers des nombres de la forme* $1 + 4x^2$. Bullet. de l'Acad. Imperiale de St. Pétersbourg t. III, 55-59.

(*) Dans les numéros 78-84 nous rassemblons quelques précieuses indications relatives aux travaux de Tchébychef cités dans des ouvrages d'autres auteurs.

80. *Théorème sur les minimums successifs de $x-ay-\alpha$ pour des valeurs entières de x et y.* Cours de M. Hermite. 4.ème éd. 1891, p. 199. Comparer Hermite: *Sur une extension donnée à la theorie des fractions continues par M. Tchébychef.* (Extrait d'une lettre à M. Borchardt). Journ. de Crelle, vol. 88, 1880; cité d'après le Cours de M. Hermite.

81. 1893. *Arithmomètre de Tchébychef.* Annales du Conservatoire des Arts et Métiers, t. V, 2.ème série. Paris, 1893. (La description de l'arithmomètre est faite par M. M. d'Ocagne).

82. 1894. Von Bool, *Arithmomètre de Tchébychef.* Travaux de la Section physique de la Société des amis des Sciences naturelles de Moscou, t. VII, p. 12-22. (L'article de M. Bool renferme les belles photographies de la machine arithmétique envoyées à l'auteur par Tchebychef, avec des indications complementaires reproduites textuellement dans l'article).

83. *Règle pour la rectification approchée des arcs.* Note écrite de mémoire par M. D. Gravé sur sa derniére conversation mathématique avec Tchébychef. Bullet. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. II, 1895.

84. *Recréations mathématiques par E. Lucas*, t. IV. Paris, 1894. p. 197-204.

(*) 85. 1876. *Nouveau genre de problèmes du calcul des variations.* — Assoc. franç. etc., Session de 1876.

86. 1876. *Règle pour tracer les arcs circulaires de grand diamètre.* Ib. Comp.: Helmert, *Mittheilung über einige Hülfsmitell zum Zeichen sehr flachen Kreisbogen* (Zeitschr. f. Vermessungswesen, T. VI, 1877); Von Bool, *Les instruments et les appareils pour le dessin géométrique* (en russe), Moscou, 1893.

87. 1876. *Nouveau mécanisme à mouvement parallèle.* Ib.

88. 1878. *Intégration des equations differentielles du premier ordre.* — Assoc. franç. etc., Session 1878.

89. 1876. *Sur la détermination des orbites des planètes d'après des observations en grand nombre.* Comptes rendus du 5.ème Congrés des naturalistes russes à Varsovie.

90. 1876. *Sur le facteur d'intégrabilité des équations differentielles du premier ordre.* Ibid.

91. 1876. *Sur l'articulation qui donne au plan le mouvement horizontal.* Ibid.

(*) Les numéros 85-92 se rapportent à quelques communications de Tchébychef dont il ne reste que le titre (quelquefois avec de très courtes indication).

92. 1879. *Sur les parallélogrammes les plus simples.* — Comptes rendus du 6.ème Congrès des naturalistes russes à St. Pétersbourg.

93. 1860. Intégration de l'équation aux différences finies $u_n u_{n-2} = (u_{n-1} - 1)^2$ [remarque insérée dans le mémoire de M. I. Mention: *Sur le problème de Fuss.* Bulletin de l'Acad. de St. Pétersq. Tome I, p. 512].

TABLE DES MATIÈRES

I. Biographie. Premières recherches (Théorie des nombres) . . *Pages* 5

II. Valeurs approchées d'une fonction. Questions de minima d'un genre particulier. Fonctions qui s'écartent le moins possible de zéro. Construction des cartes géographiques . . . . . » 10

III. Intégration des différentielles irrationnelles . . . . . » 15

IV. Interpolation d'après la méthode des moindres carrés. Développement en séries suivant les dénominateurs des fractions réduites. Valeurs limites des intégrales pour le cas où la fonction intégrée se décompose en deux facteurs . . . . . » 17

V. Nouveau genre du problème du calcul des variations. Développement en série suivant les fonctions R_n. Minima successifs de l'expression $x - ay - b$. » 24

VI. Valeurs limites des intégrales et des sommes . . . . . » 28

VII. Théorie des probabilités. . . . . » 36

VIII. Série de Lagrange. Mécanique appliquée. Géométrie des surfaces (déformation des plans-tissus). Mécanismes de Tchébychef . . . . . *Pages* 40

IX. Considérations générales sur l'œuvre scientifique de Tchébychef . . . . . » 44

Liste des travaux de P. Tchébychef . . . . . » 47

QA
29
C5V3

Vasil'ev, Aleksandr Vasil'
evich
P.L. Tchébychef et son
oeuvre scientifique

P&A Sci.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY